

TESTANDO A TECNOLOGIA ATRAVÉS DA ABORDAGEM BOOTSTRAP: O CASO DAS EMPRESAS DE SANEAMENTO DO BRASIL

Emanoel de Souza Barros¹

Breno Ramos Sampaio²

Yony Sampaio³

Resumo: O método de simulação bootstrap tem se mostrado bastante eficiente no tocante à criação de intervalos de confiança bootstrap para testar a consistência dos estimadores de métodos não paramétricos como, por exemplo, DEA, FDH e outros. Estimções bootstrap feitas no sentido de testar a tecnologia também têm mostrado resultados bastante interessantes (SIMAR e WILSON, 1999). Este método reduz o risco de interpretações errôneas ou viesadas inerentes aos modelos não paramétricos, já que os mesmos não utilizam estatísticas de testes para medir a consistência de seus estimadores. Este trabalho em particular tem como objetivo principal verificar se índices de tecnologia, estimados pelo método Malmquist convencional, apresentam variação de eficiência e de tecnologia significativa quando são submetidos a um teste de hipótese bootstrap. São utilizados dados de empresas de saneamento do Brasil para o período de 1998 a 2003. Os resultados mostram que os períodos analisados apresentam variações significativas em seus índices de eficiência. Estas variações estão, em certos casos, ligadas aos efeitos de mudanças tecnológicas. As distribuições dos índices de eficiência sob simulação têm se mostrado muito suscetíveis às variâncias bootstrap estimadas para cada período, desenhando distribuições mais dispersas que outras. No entanto, tais testes têm se mostrado eficientes no sentido de aproximar os resultados estimados de sua verdadeira fronteira.

Palavras-chaves: DEA. Tecnologia. Replicações. Bootstrap. Índices Malmquist.

Classificação JEL: H4, C14

¹ PhD pela Université Paris 1 – Pantheon Sorbonne, França, 2006. Professor do Departamento de Economia UFPE. Bolsista PRODOC/CAPES.

² Mestrando em Economia – PIMES – UFPE.

³ PhD pela University of Califórnia. Professor Titular do Departamento de Economia – UFPE.

Abstract: The bootstrap simulation method appears quite efficient for estimation of bootstrap confidence intervals and testing significance of estimators in non parametric models such as DEA, FDH and others. Bootstrap estimation to test technological differences also showed interesting results [Simar and Wilson (1999)]. This approach can reduce the risks of erroneous interpretations of results of non parametric models. This paper aims to verify if Malmquist indices present technological variation when submitted to bootstrap test of hypothesis. Data from Brazilian sanitation companies for the period 1998-2000 are used. The results show that some periods present variations in their indices of efficiency, and in certain cases, in their indices of technology. The distribution of indices of technology under simulation has shown very susceptible to the bootstrap variances for each period, drawing distributions more dispersed than others. However, bootstrap tests have revealed efficient in the approximation of the true unknown frontier.

Key-words: DEA. Technology. Resampling. Bootstrap. Malmquist Indices.

JEL codice: H4, C14

1 Introdução

O setor de saneamento do Brasil vem enfrentando grandes dificuldades tanto no serviço de fornecimento de água quanto no serviço de coleta e tratamento de esgoto. O percentual de perda de água durante o fornecimento chega a ser de 43% de toda a água produzida. Quanto à coleta de esgoto, apenas 34% dos domicílios brasileiros possuem conexão com a rede de esgoto. Dois terços destes ainda continuam a lançar seus dejetos em locais inapropriados, poluindo rios, mares e lençóis freáticos (SNIS, 2006). Destaque deve ser dado à proliferação de doenças que têm forte relação com a taxa de mortalidade infantil, com maior efeito em regiões de baixa renda (COELHO, 2004). Segundo a Organização Mundial de Saúde (OMS), cerca de oitenta tipos de doenças são transmitidas diretamente por água contaminada (CARMO e TÁVORA JUNIOR, 2003).

As externalidades negativas ocasionadas pela falta de infra-estrutura se devem em grande parte à falta de investimentos no setor. Esta falta de investimento acaba aumentando significativamente os gastos públicos, pois se observam elevadas taxas de internamentos hospitalares oriundas da falta de esgotamento sanitário. Segundo o Sistema Único de Saúde – SUS (2000), para cada real investido em saneamento, os municípios acabam por economizar cinco em gastos no setor de saúde.

Segundo Sampaio e Sampaio (2006), entre 1998 e 2003, a média de população atendida com água e com esgoto foi de 70% e 33%, respectivamente. Isto implicou diretamente nos problemas sociais já mencionados. A extensão das redes de água e esgoto tem mostrado alta correlação com o crescimento da população brasileira, o que confirma a grande necessidade de investimentos no setor. Outro aspecto que merece destaque é o percentual de tratamento de água e esgoto pelas empresas. Para o tratamento de água, o percentual se manteve em uma média de 85% de 1998 a 2003, enquanto que o tratamento de esgoto teve um aumento de 5% ao ano, passando de 45% para 58% de esgoto tratado, no mesmo período.

Contudo, esta situação é considerada ainda insatisfatória, pois a expansão é constantemente freada pela carência de recursos por parte do governo, devido à elevada dívida interna dos estados e municípios e aos compromissos com relação ao superávit primário. Como os serviços de água e saneamento são operados como monopólios naturais, é possível efetivar a descentralização desses serviços e o ingresso do setor privado, mas há necessidade de estabelecimento de marco regulatório compatível. Já existe em curso uma experiência pioneira de parceria público/privada (PPP) para gerar investimentos, tanto a nível municipal como estadual, através de concessões (FUJIWARA, 2005). No entanto, não foram feitas avaliações do desempenho desses novos arranjos.

A desigualdade na oferta do serviço tanto é social, como antes destacado, como geográfica. Segundo Coelho (2004), nas regiões com população mais pobre, como o Nordeste, a carência do serviço é mais acentuada. Em 2000, 56% dos municípios da região não dispunham de acesso a esse serviço.

Dada a carência constatada, principalmente em relação ao saneamento, é interessante analisar a possibilidade de expansão e melhoria do sistema através da estimação de fronteiras de eficiência e de

regressões buscando fatores explicativos dessa ineficiência. Diversidades regionais podem talvez explicar a fonte das disparidades constatadas. Utilizando o modelo DEA, Sampaio e Sampaio (2006) construíram fronteiras de eficiência, constatando que as empresas de tratamento de esgoto possuem níveis de eficiência inferior aos obtidos pelas empresas de distribuição de água. A eficiência global do setor se mostrou positivamente correlacionada com os níveis de eficiência dos setores de distribuição de água e de tratamento de esgoto, porém a influência do sistema de abastecimento de água é o dobro da do sistema de coleta de esgoto. Fatores como lucro líquido para cada um dos setores, juntamente com as despesas com empregados e a localização no sul do país tem efeito positivo sobre o nível de eficiência. A análise empreendida, no entanto, apresenta diversas limitações.

A primeira refere-se à estimação de fronteiras não-paramétricas, a qual supõe distribuições conhecidas somente assintoticamente. A partir dos anos noventa, a econometria tomou consciência que o custo de uma má especificação de um modelo está intimamente ligado ao risco crescente de conclusões errôneas. O desenvolvimento de técnicas de estimação menos restritivas e a procura de modelos melhor especificados fizeram com que a descoberta de testes mais consistentes se tornasse o objetivo principal dos economistas. A preocupação principal, centrada nas estimativas nas décadas precedentes, voltou-se para a inferência estatística. Foi neste contexto que diversos métodos de simulação, como Monte Carlo e Bootstrap, vieram à tona. O objetivo destes métodos é encontrar uma resposta à necessidade de testar a confiabilidade das estatísticas largamente utilizadas e estimar testes de hipóteses e intervalos de confiança mais próximos da verdadeira distribuição estatística, a qual é desconhecida.

Beran (1986) e Hall e Titterington (1989) foram os primeiros a propor uma simulação baseada no Bootstrap. Derivado do método de Monte Carlo, ele se diferencia deste primeiro pelo fato do termo de erro ser “desenhado” de amostras construídas a partir de uma amostra original. Estas amostras são tiragens aleatórias da amostra original e não existe um modelo a priori que suponha um formato para a distribuição. O Bootstrap tem diversos tipos de aplicações, especialmente nas situações onde os modelos tradicionais têm certas dificuldades em

obter resultados satisfatórios. O bootstrap pode estabelecer, sob certas condições, testes de hipóteses e intervalos de confiança mais confiáveis do que os dos modelos tradicionais (Mínimos Quadrados Ordinários, Máxima Verossimilhança, Mínimos Quadrados Ponderados, etc.).

O princípio do Bootstrap consiste em especificar um DGP (Processo Gerador de Dados), nomeado DGP Bootstrap, substituindo os parâmetros e as distribuições de probabilidade desconhecidas no modelo, por estimativas empíricas destes últimos. A distribuição da probabilidade das estatísticas de teste sob este DGP artificial é chamada Distribuição Bootstrap. Deste modo, pode-se calcular um teste bootstrap ou um *p-value* bootstrap usando a distribuição bootstrap no lugar da distribuição nominal. Se o DGP Bootstrap for suficientemente próximo do verdadeiro DGP, os dados gerados por este DGP serão similares àqueles que seriam gerados pelo verdadeiro DGP.

A abordagem Bootstrap é também adaptada ao caso das fronteiras não paramétricas. As fronteiras são construídas a partir de um DGP, pivô assintótico de um DGP desconhecido, compatível com todas as definições, suposições e propriedades do conjunto de produção. Essas regras permitem estabelecer uma fronteira de produção coerente com a teoria da produção, mesmo na ausência de uma forma funcional. Jensen (2000), Simar (1992), Horrace e Richards (2004), Hall, Hardle e Simar (1995) e Simar e Wilson (1998, 1999) são exemplos de trabalhos que estimaram fronteiras bootstrap a partir das abordagens paramétricas e não paramétricas.

A segunda deficiência decorre do fato de se fazer inferências sobre mudança na tecnologia, comparando fronteiras estimadas para cada ano. Como já visto, o uso da abordagem bootstrap permite o teste de hipóteses e o cálculo de intervalos de confiança. Mas a medida de produtividade em si pode ser questionada.

Färe et al. (1992) expandiram a idéia inicial proposta por Farrell (1957) juntamente com os conceitos de "medida de produtividade" desenvolvida por Caves et al. (1982) para desenvolver o Índice Malquist de produtividade, que pode ser decomposto em "índice de mudança na tecnologia" e "índice de mudança na eficiência" ao longo de dois períodos de tempo, t_1 e t_2 . Simar e Wilson (1999) expandiram os resultados propostos por Färe et al. (1992) e deram uma interpretação

estatística aos índices de produtividade Malmquist e seus componentes, propondo um Índice Bootstrap Malmquist para estimar intervalos de confiança bootstrap para tais índices.

A grande contribuição de Simar e Wilson (1999) está no fato de testar se as mudanças em produtividade, eficiência e tecnologia são significantes no sentido estatístico. Em outras palavras, a metodologia bootstrap permitiu estabelecer testes de hipóteses e intervalos de confiança de modo a verificar se tais mudanças são reais, ou meros elementos ligados ao fato da verdadeira fronteira de produção não ser conhecida e ser estimada para dar consistência a amostras finitas.

Para isto, eles ampliaram o procedimento bootstrap desenvolvido por eles mesmos em, 1998, (SIMAR e WILSON, 1998) para estimar intervalos de confiança das funções distâncias usadas na construção da ineficiência técnica de métodos não paramétricos (DEA, FDH, entre outros). Eles demonstraram que o segredo para se obter estimações consistentes estatisticamente para estes intervalos de confiança está na escolha do processo de replicação do DGP não observado.

Visando ampliar e testar estes resultados, este artigo tem como objetivo principal avaliar as medidas de eficiência técnica e tecnologia das empresas de saneamento do Brasil para o período de 1998 a 2003 através da estimação de teste de hipótese e intervalo de confiança bootstrap, segundo Simar e Wilson (1999). Isto é, verificar se os índices de tecnologia estimados pelo método Malmquist tradicional estariam de fato sendo influenciados por mudanças na tecnologia ou se os níveis de eficiência estão ligados unicamente à má alocação dos fatores de produção disponíveis sem mudança tecnológica.

Alguns fatores influenciaram na escolha da metodologia DEA. Um deles foi o fato de o DEA não exigir que as firmas assumam comportamento de minimização e maximização de lucros, como na abordagem paramétrica de fronteira de produção. Isto é muito conveniente quando se analisam empresas de saneamento, cujas características se aproximam mais de um oligopólio concorrencial. Esta estrutura de mercado admite a possibilidade de adoção de outras estratégias pelas firmas.

Na próxima seção, são definidos os índices Malmquist no sentido da abordagem não paramétrica e introduzido o conceito de Índice Bootstrap Malmquist proposto por Simar e Wilson (1999) para testar a

hipótesede tecnologia constante e quantificar as inferências estatísticas bootstrap. São apresentados também os dados e variáveis utilizados na análise. A seção 3 apresenta os resultados encontrados por tais técnicas no âmbito das empresas de saneamento do Brasil e, na seção 4, são apresentadas as conclusões e considerações finais.

2 Metodologia

A abordagem não paramétrica tem como característica principal a ausência de uma forma funcional que explique como os insumos são transformados em produtos. Dentre os vários métodos usados na teoria de funções fronteiras, o mais conhecido é o Data Envelopment Analysys (DEA), desenvolvido por Charnes, Cooper e Rhones (1978).

Banker (1993) provou a consistência dos níveis de eficiência baseados na distância produto, mas não quantificou a taxa de convergência na qual esses níveis de eficiência se aproximam de seus verdadeiros valores. Korostelev et al. (1995a, 1995b) analisaram também este mesmo problema e derivaram a velocidade de convergência em direção do conjunto de produção desejável, mas não em relação aos níveis de eficiência propriamente ditos. Kneip et al. (1998) ampliaram esta mesma análise para o caso de múltiplos insumos e produtos. Em seguida eles calcularam a velocidade de convergência em direção aos verdadeiros conjuntos de produção e níveis de eficiência.

Diante da complexidade e da natureza multidimensional dos estimadores DEA, as distribuições da amostra não são obtidas tão facilmente. Gijbels et al. (1999) conseguiram derivar uma distribuição assintótica para o caso de um insumo e um produto usando os termos de erros e suas respectivas variâncias assintóticas. Simar e Wilson (1998) propuseram uma estratégia bootstrap para analisar a sensibilidade das medidas de eficiência ao longo das variações das amostras bootstrap. Para isto, eles estimaram intervalos de confiança e correções de vieses próprios do método DEA. Todavia, este procedimento estava condicionado a regras de homogeneidade restritivas para as distribuições de eficiência.

Esta próxima seção, em particular, se concentra no método utilizado por Simar et Wilson (1999) como uma extensão do método

proposto por esses mesmos autores em 1998. Eles fazem uma revisão teórica das medidas de produtividade, eficiência e tecnologia propostas por Färe et al. (1992) para o Índice Malmquist e aplicam uma simulação bootstrap que permite estabelecer intervalos de confiança e testes de hipóteses para verificar a consistência dos índices de tecnologia ao longo de dois períodos de tempo.

2.1 O Índice Malmquist

O Índice Malmquist foi elaborado inicialmente por Färe et al. (1992) com o objetivo de medir as variações de produtividade, eficiência e tecnologia entre os períodos de tempo t_1 e t_2 . Para isto, eles utilizam taxas de variação onde estes índices seriam calculados com base nos níveis de eficiência estimados para um conjunto de observações analisadas sob a forma de dados de painel.

Neste caso, o nível de eficiência da firma i no tempo t_1 com relação à tecnologia existente no período, para $\forall i, i = 1, 2, \dots, N$, será então dado por

$$D_i^{t_1|t_1} \equiv \inf_{\theta} f \left\{ \theta \left| \left(x^{t_1}, y^{t_1} / \theta \right) \in P(x^{t_1}) \right. \right\} \quad (1)$$

Onde x, y e θ representam a matriz de insumos, a matriz de produtos e o valor a ser maximizado pelo método de programação, respectivamente.

A equação (1) nos dá a função distância $D_i^{t_1|t_1}$, uma medida de distância normalizada da i -ésima firma no espaço insumo/produto do tempo t_1 sobre a fronteira do conjunto de produção do tempo t_1 num hiperplano onde os produtos se mantêm constantes. Assim, $0 \leq D_i^{t_1|t_1} \leq 1$ (distância produto). Se existem dois períodos de tempo, de modo que $t_1 \neq t_2$, teremos então $D_i^{t_1|t_2} (<, =, >) 1$.

Segundo Färe et al. (1992), a medida da produtividade da firma i no espaço de tempo t_1 e t_2 , onde $t_2 > t_1$, será então

$$M_i(t_1, t_2) = \left[\frac{D_i^{t_2}(y^{t_2}, x^{t_2})}{D_i^{t_1}(y^{t_1}, x^{t_1})} \right] \left[\frac{D_i^{t_1}(y^{t_2}, x^{t_2})}{D_i^{t_2}(y^{t_2}, x^{t_2})} \times \frac{D_i^{t_1}(y^{t_1}, x^{t_1})}{D_i^{t_2}(y^{t_1}, x^{t_2})} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Se $M_i(t_1, t_2) < 1$, tem-se aumento na produtividade de t_1 para t_2 , se $M_i(t_1, t_2) > 1$, tem-se uma diminuição na produtividade do período t_1 para t_2 . Se $M_i(t_1, t_2) = 1$, nenhuma mudança de produtividade operou-se entre os períodos t_1 e t_2 .

A variação de produtividade $M_i(t_1, t_2)$ é o produto do índice de eficiência $E_i(t_1, t_2)$ e do índice de tecnologia $T_i(t_1, t_2)$, de modo que $M_i(t_1, t_2) = E_i(t_1, t_2) \times T_i(t_1, t_2)$.

Os níveis de eficiência calculados pela equação (1) não são observados na prática. Isto ocorre porque não se tem informação sobre toda a população de firmas. Para resolver este impasse, os modelos de estimação de fronteiras recorrem a métodos de estimação que, sob certas condições, poderiam se comportar como a população total e, assim, gerar estimadores para a equação (1) que seriam, em teoria, não-viesados em relação aos verdadeiros valores desconhecidos. Este é o caso dos métodos DEA, FDH e outros. Eles estimam níveis de eficiência que são considerados assintoticamente convergentes aos verdadeiros níveis de eficiência.

Em forma de programação linear, o estimador da equação (1) pelo método DEA, para dois períodos de tempo, t_1 e t_2 , é dada por:

$$\left(\hat{D}_i^{t_1|t_2} \right)^{-1} = \min \left\{ \lambda \mid y_{ti_1} \leq Y^{t_2} \psi_i, \lambda x_i \geq X^{t_2} \psi_i, \psi_i \in (\mathbb{R}_+)^N \right\}$$

Onde $t_1 (<, =, >) t_2$.

2.2 O Índice Bootstrap Malmquist

Baseando-se nas cinco hipóteses definidas por Kneip et al. (1998) para caracterizar o DGP (Processo Gerador de Dados) de um modelo DEA clássica, Simar e Wilson (1999) as adaptaram ao caso do Índice Malmquist. Assim, este índice pode ser estimado sob certas condições que garantem resultados mais confiáveis (como convexidade do conjunto de produção), além de definir um formato para as funções densidades de $\hat{D}_i^{t_1|t_2}(x, y)$, estimador consistente de $D_i^{t_1|t_2}(x, y)$.

O Índice Bootstrap Malmquist foi proposto por Simar e Wilson (1999) para testar a consistência dos níveis de eficiência de amostras em cross-section pela estimação de intervalos de confiança derivados de uma densidade gaussiana de Kernel. Este método consiste em replicar um dado DGP de modo que possamos gerar um número grande B de pseudo-amostras, dadas por $\varphi^* = \left\{ (x_{it}^*, y_{it}^*) \mid i = 1, 2, \dots, N; t = 1, 2 \right\}$. Para cada replicação bootstrap $b = 1, \dots, B$, é usada a equação (3) para medir a distância de cada observação da amostra em relação à amostra original φ e estimar fronteiras para cada período dos pseudo-dados em φ^* . A equação (3) é então substituída pela equação

$$\left(\hat{D}_i^{t_1|t_2^*} \right)^{-1} = \min \left\{ \lambda \mid y_{it_1} \leq Y^{t_2^*} \psi_i, \lambda x_i \geq X^{t_2^*} \psi_i, \psi_i \in \mathbb{R}_+^N \right\}$$

$$\text{Onde } Y^{t^*} = [y_{1t}^*, \dots, y_{Nt}^*] \text{ e } X^{t^*} = [x_{1t}^*, \dots, x_{Nt}^*].$$

Para os dois períodos de tempo, t_1 e t_2 , este método bootstrap estima $\left\{ \hat{D}_i^{t_1|t_1^*}, \hat{D}_i^{t_2|t_2^*}, \hat{D}_i^{t_1|t_2^*}, \hat{D}_i^{t_2|t_1^*} \right\}_{b=1}^B$ para cada firma $i = 1, \dots, N$. Estas estimações podem então ser usadas para construir as estimações bootstrap para $\hat{M}_i^*(t_1, t_2)(b)$, $\hat{E}_i^*(t_1, t_2)(b)$ e $\hat{T}_i^*(t_1, t_2)(b)$ (onde $i = 1, \dots, N$ e $b = 1, \dots, B$) correspondente à equação (2).

A técnica a ser empregada neste trabalho para estabelecer intervalos de confiança bootstrap será o *smoothed bootstrap*, desenvolvida por Silverman (1998). Nesse caso em particular, é necessário construir amostras bootstrap (x_i^*, y_i^*) a partir de uma função de densidade $\hat{f}(x, y)$ em φ . A função $\hat{f}(x, y)$ representaria uma atenuação, um estimador consistente da densidade subjacente $f(x, y)$ de φ . Estas sentenças equivalem a estimar a densidade $f(y, \eta, D)$ e construir as amostras bootstrap $(y_{it}^*, \eta_{it}^*, D_i^{t_1|t_1^*})$.

Silverman (1998) propõe um método para construí-las chamado *cross-validation*. Este método consiste em utilizar os estimadores de $f(y, \eta, \hat{Z})$ a partir de um conjunto $\{(y_{it}, \eta_{it}, \hat{Z}_i), i = 1, \dots, N, t = 1, 2\}$, onde $Z_i = [\hat{D}_i^{t_1|t_1}, \hat{D}_i^{t_2|t_2}]$, a i -ésima linha da $(N \times 2)$ matriz contendo os índices de eficiência originais.

No trabalho publicado por Silverman (1998), o processo de *cross-validation* foi construído para desenhos de densidades para observações em *cross-section*. Simar e Wilson (1998) adaptaram este procedimento para quantificar intervalos de confiança bootstrap para os índices de eficiência estimados na ausência de correlação temporal. No entanto, para dados de painel, a presença de correlação serial é forte entre os dados e serve para explicar os efeitos sobre a produtividade, eficiência e tecnologia ao longo do tempo. Portanto, para preservar tal correlação, Simar e Wilson (1999) introduziram o conceito de Densidade Bivariada de Kernel, que estima a densidade conjunta de $\{\hat{D}_i^{t_1|t_1}, \hat{D}_i^{t_2|t_2}\}_{i=1}^N$.

Através de alguns procedimentos de cálculos, Simar e Wilson (1999) puderam encontrar o estimador da densidade bivariada de Kernel, dado por:

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{4Nh^2} \sum_{j=1}^{4N} K_j \left(\frac{z - \Delta_j}{h} \right) \quad (5)$$

Onde Δ_j é a j -ésima linha de uma matriz Δ , formada por dois vetores $A = [\hat{D}_1^{t_1|t_1}, \dots, \hat{D}_N^{t_1|t_1}]$ e $B = [\hat{D}_1^{t_2|t_2}, \dots, \hat{D}_N^{t_2|t_2}]$ de dimensão $(4N \times 2)$. $K_j(\cdot)$ representa a função densidade normal bivariada, $z = [z_1 \quad z_2]$ e h nos dá o parâmetro de amortização.

A consistência de $\hat{f}(z)$ requer que $h \rightarrow 0$ à medida que $N \rightarrow \infty$, mas não tão rápido. Assim, teremos necessidade de um h que tenha a propriedade seguinte: $h = O(N^{-1/(m+q+4)})$. O parâmetro de amortização minimiza a média assintótica dos erros quadráticos quando os dados são normalmente distribuídos, com variância 1 e covariância zero. O estimador \hat{h} foi criado inicialmente para o caso de uma densidade univariada. Silverman (1998) sugere que, para dados bivariados, ele teria a propriedade $h = O[4/5N]^{1/6}$.

Uma vez obtidos os valores $\{\hat{D}_i^{t_1|t_1^*}, \hat{D}_i^{t_2|t_2^*}, \hat{D}_i^{t_1|t_2^*}, \hat{D}_i^{t_2|t_1^*}\}_{b=1}^B$, pode-se então estimar os valores $\hat{M}_i^*(t_1, t_2)$, $\hat{E}_i^*(t_1, t_2)$ e $\hat{T}_i^*(t_1, t_2)$ para então calcular as inferências estatísticas bootstrap. Como se está interessado no índice de tecnologia em particular, as inferências serão estimadas com base neste índice.

Considere-se o conjunto bootstrap estimado para o índice de tecnologia dado por $\{\hat{T}_i^*(t_1, t_2)\}_{b=1}^B$. O viés bootstrap estimado para este índice será:

$$Viés_B[\hat{T}_i(t_1, t_2)] = B^{-1} \sum_{b=1}^B \hat{T}_i^*(t_1, t_2) - \hat{T}_i(t_1, t_2)$$

A variância dos valores bootstrap $\hat{T}_i^*(t_1, t_2)$ nos dá o estimador da variância de $\hat{T}_i(t_1, t_2)$ ou $(\hat{\sigma}^2)$. Assim, a média esti-

mada dos erros quadráticos de $\hat{T}_i(t_1, t_2)$ será $4\hat{\sigma}^2$ se $B \rightarrow \infty$, e $\left[\hat{\sigma}^2 + (Viés_B[\hat{T}_i(t_1, t_2)])^2 \right]$ tomando como base $\hat{T}_i(t_1, t_2)$. A variância bootstrap terá então o formato

$$\hat{s}^2 < \frac{1}{3} (Viés_B[\hat{T}_i(t_1, t_2)])^2 \quad (7)$$

Os valores bootstrap $\hat{T}_i^*(t_1, t_2)$ podem agora ser utilizados para construir intervalos de confiança para seus verdadeiros valores $T_i(t_1, t_2)$. Todavia, como a distribuição de $(\hat{T}_i(t_1, t_2) - T_i(t_1, t_2))$ é desconhecida, estes intervalos são calculados a partir das amostras bootstrap. O objetivo é aproximar a distribuição desconhecida de $(\hat{T}_i(t_1, t_2) - T_i(t_1, t_2))$ através da distribuição de $(\hat{T}_i^* - \hat{T}_i(t_1, t_2))$. O processo bootstrap estabelecido por $\{\hat{T}_i^*(t_1, t_2)\}_{b=1}^B$, originário de $\hat{T}_i(t_1, t_2)$, pode então ser usado para obter uma aproximação empírica do intervalo de confiança.

Assim, tem-se um intervalo de confiança com alta probabilidade que ele seja verdadeiro, estimado por

$$Pr ob\left(-b_a^* \leq \hat{T}_i^*(t_1, t_2) - \hat{T}_i(t_1, t_2) \leq -a_a^*\right) = 1 - \alpha$$

Mecanicamente, isto equivale a colocar os valores $[\hat{T}_i^*(t_1, t_2) - \hat{T}_i(t_1, t_2)]$, $b = 1, \dots, B$, em ordem crescente, excluindo $(\alpha/2 \times 100)$ – *porcentos* de seus últimos elementos. Os valores $-b_a^*$ e $-a_a^*$ serão os últimos pontos dos elementos preservados no conjunto. A expressão em (10) “alta probabilidade de ser verdadeira” quer dizer que à medida que $B \rightarrow \infty$, a probabilidade que ela seja verdadeira tende a se aproximar de 1.

2.3 Dados e variáveis

A base de dados utilizada neste trabalho foi obtida diretamente do Sistema Nacional de Informações de Saneamento (SNIS) do Ministério das Cidades e abrange uma amostra de 25 empresas de saneamento de todo o Brasil para o período de 1998 a 2003. Estes dados estão arranjados em forma de panel data ao longo destes seis anos.

O modelo DEA foi estimado para cada firma isoladamente, com quatro insumos e cinco produtos. Esses insumos e produtos foram escolhidos em função da revisão de trabalhos já realizados e da disponibilidade de dados do SNIS.

Os quatro insumos são:

- Despesas totais com serviços, em R\$/ano, representando o somatório de todas as despesas com insumos, matérias-primas, controles sanitários e demais outros fatores de produção necessários à manutenção contínua dos serviços (X1);
- Número de empregados, representando a mão-de-obra ligada direta e indiretamente à distribuição de água e ao tratamento de esgoto (X2);
- Extensão da rede de água em utilização, em km (X3);
- Extensão da rede de esgoto em utilização, em km (X4).

Os cinco produtos do modelo são respectivamente:

- População total atendida com água, em número de habitantes (Y1);
- Percentual de água tratada (Y2);
- População total atendida com esgoto, em número de habitantes (Y3);
- Porcentagem de esgoto tratado (Y4);
- Receita Total, em R\$/ano, representando o somatório das receitas obtidas com os serviços de água e esgoto (Y5).

Estes insumos e produtos foram escolhidos porque podem quantificar de forma direta os efeitos sobre o fornecimento de água e tratamento de esgoto para cada empresa de saneamento. Os resultados apresentados na próxima seção foram estimados pelo package FEAR, desenvolvido por Wilson (2007), para a linguagem R e pelo toolbox BOOTSTRAP do MATLAB. A Tabela 1 apresenta as estatísticas básicas para os insumos e produtos utilizados na análise.

Tabela 1: Estatísticas básicas das variáveis utilizadas

Variáveis	Média					
	1998	1999	2000	2001	2002	2003
X1	319.054.866,5 (98.905.903,9)	300.791.807,4 (101.626.069,7)	245.581.160,9 (64.055.363,9)	346.995.541,2 (125.128.020,6)	432.796.359,4 (150.747.242,5)	404.350.876,4 (152.627.396,0)
X2	3.407,9 (831,9)	2.933,2 (813,9)	2.197,3 (473,4)	2.607,7 (814,0)	2.660,2 (822,7)	2.555,5 (796,6)
X3	10.209,3 (2.187,2)	9.723,7 (2.357,5)	8.296,5 (1.866,5)	9.179,1 (2.532,5)	9.873,9 (2.744,7)	10.242,8 (2.837,9)
X4	3.161,8 (1.228,0)	3.040,8 (1.286,9)	2.068,5 (563,1)	3.322,6 (1.370,9)	3.553,8 (1.450,0)	3.755,9 (1.522,0)
Y1	3.706.542,9 (825.760,8)	3.464.389,7 (877.716,1)	2.872.144,0 (607.061,3)	3.235.945,5 (938.285,6)	3.338.885,7 (947.457,6)	3.345.167,6 (953.607,4)
Y2	80,8 (4,1)	80,6 (4,4)	84,0 (4,1)	89,9 (2,8)	88,9 (3,3)	90,3 (2,8)
Y3	1.580.347,4 (617.138,2)	1.509.918,0 (637.909,0)	978.138,8 (280.667,2)	1.557.027,1 (669.537,4)	1.616.745,4 (692.609,1)	1.558.908,5 (693.678,5)
Y4	68,5 (8,6)	69,2 (10,2)	67,2 (9,3)	68,3 (7,0)	59,3 (7,7)	67,0 (7,1)
Y5	325.662.644,6 (117.407.802,9)	314.202.771,7 (123.538.574,4)	220.159.613,6 (58.251.151,5)	336.664.741,7 (134.335.298,8)	388.477.406,0 (150.584.626,5)	402.115.139,7 (159.213.927,8)

Fonte: Elaboração Própria. Dados do SNIS, 2006.

Nota: A variância é apresentada entre parênteses.

3 Resultados

A Tabela 2 apresenta os resultados do modelo DEA Malmquist submetido à simulação bootstrap. O índice de eficiência técnica (EF) foi medido para seis períodos consecutivos, de 1998 a 2003, e 25 empresas de saneamento do Brasil. Os valores dos índices foram estimados pelo método DEA Malmquist convencional e estão delineados para cada período de tempo por empresa. Em seguida, aplica-se o teste de hipótese bootstrap para testar se houve ganho de eficiência técnica. Se $EF = 1$ caracteriza-se ausência de ganho de eficiência no período de tempo t_1/t_2 , se $EF < 1$, temos um ganho (melhora) para o período, e, se $EF > 1$, houve uma regressão em termos de eficiência no período supra citado.

Analisando o quadro por um ângulo puramente não paramétrico, pode-se afirmar que todas as firmas tiveram leves mudanças, para cima ou para baixo, em seus índices tecnológicos. No entanto, ao se aplicar a simulação bootstrap, o quadro sofre algumas mudanças. A partir da função de densidade Kernel (5), pode-se estabelecer testes de hipótese t-percentil baseado nas equações (6), (7) e (8) e testar a hipótese nula $H_0: EF = 1$ contra a hipótese alternativa $H_1: EF < 1$ ou $EF > 1$, ao nível de significância de 5%. Os índices tecnológicos que costumam variar pouco para cima ou para baixo poderiam estar situados na região de aceitação e serem, neste caso, não significativos.

Tabela 2: Eficiência técnica média de 25 empresas de saneamento do Brasil durante períodos consecutivos de 1998 a 2003 com base no modelo DEA Malmquist (orientação produto) e validado pelo teste de hipótese bootstrap t-percentil proposto por Simar et Wilson (1999) com 3999 replicações ($H_0: EF = 1$, $H_1: EF < 1$ ou $EF > 1$)

Período	Eficiência Técnica (EF)	Desvio-padrão	Mínimo	Máximo
1998/1999	1,0950*	1,3745	1,1013	1,1925
1999/2000	1,0636*	1,8917	0,9207	1,0287
2000/2001	0,9631*	4,8356	1,0896	1,4910
2001/2002	1,0261*	1,9056	0,8777	0,9411
2002/2003	0,9921*	2,8976	0,9712	1,2367
(1998-2003)	1,0264*	1,8174	1,0715	1,1845

Fonte: Elaboração própria. Dados do SNIS, Ministério das Cidades, 2006.

Nota: Significante a 5%.

Ao se aplicar o teste de hipótese bootstrap t-percentil, pode-se observar que os períodos 1998/1999, 1999/2000 e 2001/2002 rejeitam a hipótese nula ($EF = 1$). Os períodos de 1998/1999, 1999/2000 e 2001/2002 apresentam ligeira perda de eficiência, enquanto que o período de 2000/2001 apresenta ganhos de eficiência. As variâncias bootstrap são pequenas e se concentram em torno da média. Para o conjunto dos anos de 1998 a 2003, as empresas de saneamento apresentaram, em média, ligeira perda de eficiência. Isto poderia ser uma consequência direta do efeito cumulativo das perdas de eficiência dos cinco períodos analisados conjuntamente.

Levando em conta a dualidade entre teste de hipótese e intervalo de confiança, pode-se também estabelecer intervalos de confiança bootstrap para testar a hipótese de tecnologia constante para cada período. Na Tabela 2, alguns períodos apresentaram variação em seus índices de eficiência para mais ou para menos. Mas o mesmo ocorre ao nível de tecnologia? O período completo de 1998 a 2003 poderia revelar alguma mudança consistente na tecnologia que possa explicar a perda de eficiência relatada na tabela 2? O impacto negativo ou positivo nos índices de eficiência de certos períodos seria suficiente para afetar o índice geral de tecnologia de um dado período?

A Tabela 3 mostra os intervalos de confiança bootstrap gerados para testar a tecnologia por meio da equação (10) para os períodos 1998/1999, 1999/2000, 2000/2001, 2001/2002, 2002/2003 e 1998-2003. A metodologia usada foi o *smoothed bootstrap*, proposto por Silverman (1998) e Simar e Wilson (1999). Assim, como no caso do teste de hipótese para a eficiência, supõe-se que o índice de tecnologia (T) estimado pelo DEA Malmquist não apresenta variação para mais ou para menos ($T = 1$) e os índices de tecnologia não estão correlacionados às perdas ou ganhos de eficiência apresentados na tabela 2. Como hipótese alternativa temos $H_0: T < 1$ ou $T > 1$, avanço tecnológico e retrocesso, respectivamente.

O parâmetro de amortização é dado por $h = 1,06 \cdot \delta(x, y) \cdot N^{-1/5}$

onde $\delta(x, y)$ é o desvio-padrão estimado a partir da variância (9) e N é o número de observações. Este parâmetro minimiza a média assintótica

dos erros quadráticos quando os dados são normalmente distribuídos, com variância 1 e covariância 0.

Os parâmetros de amortização para 1998/1999, 1999/2000, 2000/2001, 2001/2002, 2002/2003 e 1998-2003 são 1,7008, 1,5464, 2,3653, 1,4539, 1,7105 e 1,7834, respectivamente. Pela teoria assintótica, $h \rightarrow 0$ à medida que $N \rightarrow \infty$. O número de observações é de 25 empresas, o que leva este parâmetro a se situar entre os valores 1,45 a 2,36, dependendo do valor da variância. Quanto maior o seu valor, maior será o “esforço” do modelo para se aproximar da verdadeira fronteira.

Tabela 3: Intervalo de confiança bootstrap para verificar a hipótese de tecnologia constante por períodos consecutivos de 1998 a 2003 (com nível de significância de 5% e 3999 replicações)*

Período	Média	Desvio-padrão	Mínimo	Máximo
1998/1999	1,053	3,054	0,919	1,106
1999/2000	0,938**	2,777	0,938	1,118
2000/2001	1,289**	4,248	0,905	1,101
2001/2002	0,879**	2,611	0,929	1,082
2002/2003	1,020	3,072	0,960	1,153
1998-2003	1,027	3,203	0,942	1,068

Fonte: Elaboração própria. Dados do SNIS, 2006.

Notas: *Estas inferências foram estimadas com base na densidade Kernel dada por (5) com auxílio do smoothed bootstrap; ** Significante a 5%.

Os períodos 1999/2000, 2000/2001, 2001/2002 rejeitam a hipótese nula, apresentando, respectivamente, progresso, retrocesso e progresso tecnológico. No entanto, os resultados apresentados na tabela 2 mostram perda, ganho e perda de eficiência para os mesmos períodos. Isto poderia ser talvez explicado, no caso de avanço tecnológico, pelo processo de assimilação da nova tecnologia e que levaria as empresas a dedicarem certo tempo para incorporar toda a tecnologia e assim aumentar suas produtividades. No caso de retrocesso tecnológico (período 2000/2001), essas empresas estariam se aproximando da fronteira de produção devido ao fato da fronteira de produção ter se deslocado para baixo, o que se traduz em ganhos de eficiência.

O período de 1998/1999 apresentou ganho de eficiência, mas estenãofoiacompanhadodeavanço/retrocesso tecnológico. Isto acontece porque as empresas, neste período de tempo, aumentaram seus níveis de eficiência, se aproximando da fronteira de produção sem que esta tenha se deslocado para cima ou para baixo. Elas passaram a alocar melhor os fatores de produção disponíveis e passaram a ser mais eficientes. Tem-se um caso clássico de eficiência analisado pelo modelo DEA.

O índice de tecnologia médio para todo o período (1998 a 2003) não foi significativo. O seu valor foi de 1,027. O efeito em termos de tecnologia foi amortizado, no agregado, pela sucessão de progresso e retrocesso de um período para outro. Além do mais, o impacto da tecnologia sobre a eficiência e vice-versa é pequeno e se concentra somente em certos períodos. Isto não é suficiente para alavancar um progresso ou retrocesso tecnológico quando se analisa uma série de anos como um todo.

Este resultado também é visualizado através da Figura 1. Ela descreve a distribuição dos índices de eficiência para os períodos 1998/1999, 1999/2000, 2000/2001, 2001/2002, 2002/2003 e para o intervalo completo de 1998-2003. Estas distribuições foram geradas a partir da densidade de Kernel dada pela equação (5). Segundo Kneip et al. (1998), o estimador DEA converge em direção à verdadeira fronteira

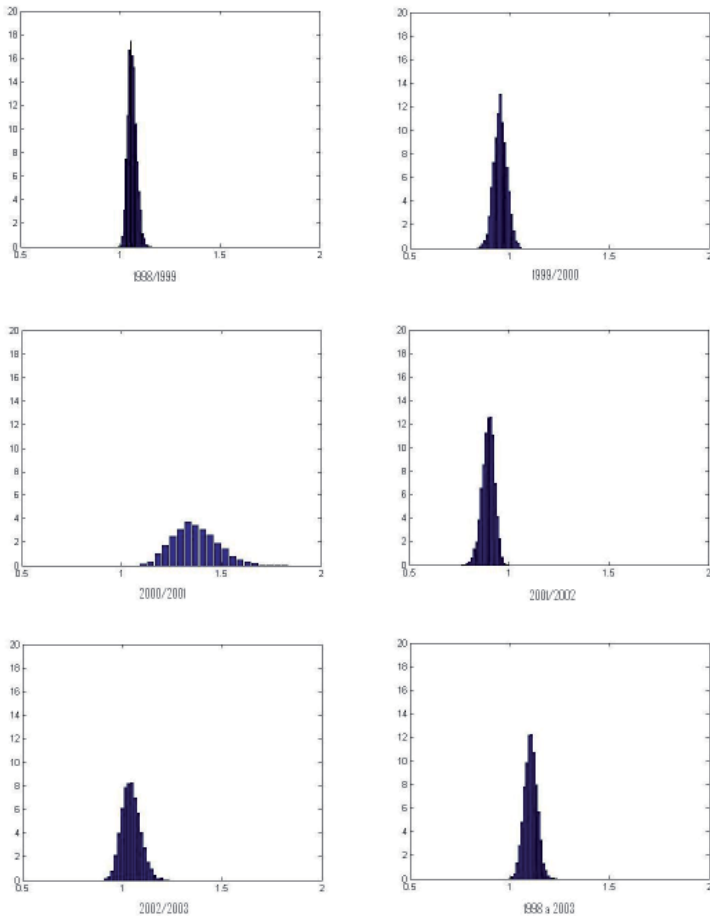
numa velocidade dada por $N^{-\frac{2}{q+m+1}}$, para q produtos, m insumos e N observações. A variância da distribuição do índice de tecnologia sob hipótese nula deve tender a zero à medida que o tamanho da amostra tende ao infinito, para todos $(q, m) \geq (1, 1)$. No nosso caso em particular, para $q=5$ e $m=4$, esta velocidade de convergência será de $N^{-\frac{1}{5}}$.

As distribuições dos índices de eficiência da Figura 1 são relativamente concentradas devido ao fator de convergência citado acima, mas elas também são influenciadas por suas respectivas variâncias. É o caso do período 2000/2001, cujo desvio-padrão é de 4,8356. Os dados estão muito dispersos entre os índices 1 e 1,8 enquanto que nos demais os índices de tecnologia se concentram em intervalos mais compactos,

Testando a tecnologia através da abordagem...

normalmente entre 0,9 e 1,2. Isto poderia nos dar mais explicações sobre o comportamento atípico do período 2000/2001.

Figura 1: Distribuições dos índices de eficiência para os períodos 1998/1999, 1999/2000, 2000/2001, 2001/2002, 2002/2003 e 1998-2003, geradas pela densidade gaussiana de Kernel sob cross-validation (SILVERMAN, 1998), com 3999 replicações bootstrap.



Fonte: Elaboração própria. SNIS, 2006.

Para os períodos cuja hipótese nula é rejeitada, pode-se observar que os valores médios estão situados na região de exclusão. Este é o caso dos períodos 1999/2000, 2000/2001 e 2001/2002, cujos valores são 1,0636, 0,9631 e 1,0261, respectivamente. Os demais períodos possuem seus valores médios dentro da região de aceitação. Outro ponto a mencionar é o fato de algumas distribuições serem mais concentradas em torno da média que outras. Embora o parâmetro de convergência siga sua trajetória em direção à verdadeira fronteira, este efeito pode ser influenciado pelo parâmetro de amortização, h , usado para calcular os intervalos de confiança da Tabela 2. Este parâmetro é diretamente influenciado pela variância bootstrap (7), que, por sua vez, define o formato da distribuição. A abordagem bootstrap apenas otimiza os resultados já encontrados pelo modelo clássico e, sob certas condições de regularidade, mostra a tendência que estes seguiriam em direção aos verdadeiros resultados e à verdadeira fronteira de produção.

De modo geral, o Índice Malmquist tem se mostrado bastante promissor no tocante aos índices de tecnologias que se pode estimar a partir dos níveis de eficiência. Este recurso foi melhorado com a introdução do DEA Malmquist Bootstrap. Este método de simulação gerou uma distribuição para os índices de tecnologia, permitindo assim implementar intervalos de confiança para verificar, vis-à-vis a hipótese nula de tecnologia constante, se os índices de eficiência e de tecnologia por período variaram ao longo dos anos de 1998 a 2003.

Somente para os períodos 1999/2000, 2000/2001 e 2001/2002 a hipótese nula de índice de tecnologia constante foi rejeitada. No entanto, as empresas de saneamento para as quais a hipótese nula foi rejeitada não foram suficientes em número para incorporar estas mudanças locais ao conjunto do período de 1998 a 2003. A alternância entre retrocesso e progresso talvez tenha mostrado um efeito amortizador sobre a variação tecnológica ao longo do tempo.

4 Conclusões

Diante dos resultados encontrados acima, pode-se afirmar que o índice Malmquist é bastante útil, não somente para analisar o contexto das firmas de saneamento ou de um conjunto de firmas, mas também

entre países, entre regiões, etc. O fato de poder separar o índice de produtividade em índices de eficiência e de tecnologia permite uma análise mais completa do quadro produtivo para um certo período de tempo.

Todavia, as estimações não paramétricas clássicas são pivôs assintóticos de seus verdadeiros índices, desconhecidos. Tal limitação gera incerteza no tocante à consistência de tais estimadores, que são freqüentemente influenciados por variações na amostra. A abordagem bootstrap permite inferir algumas correções diretamente sobre as funções distâncias estimadas pelo método clássico e, assim, checar se os vieses corrigidos aumentam ou não a média dos erros quadrados.

Outro ponto importante desta abordagem está no fato do bootstrap dar confiabilidade aos índices Malmquist. Isto é feito através da imposição de intervalos de confiança bootstrap. Tais intervalos indicam se tais índices são significativos no sentido estatístico. O fato de se ter um índice de tecnologia Malmquist diferente da unidade não é sinônimo que houve realmente mudança tecnológica. Embora certos períodos tenham apresentado índices de tecnologia fora da região de aceitação, a simulação permitiu verificar que alguns deles possuem índices de tecnologia que se encontram na região de aceitação.

Em relação à aplicação do Índice Bootstrap – Malmquist a empresas de saneamento no Brasil, chega-se à conclusão que não ocorreu maior mudança de tecnologia no agregado do período analisado, mas houve mudanças significativas em termos de ganhos/perdas de eficiência. Alguns desses ganhos/perdas estão ligados a mudanças tecnológicas por período e ao processo de assimilação de tais tecnologias por parte das empresas, e outros (como no caso do período 1998/1999) devem-se à melhoria na alocação dos recursos disponíveis sem mudança na tecnologia. Em consequência, a ineficiência constatada em Sampaio e Sampaio (2006) deve-se principalmente à má alocação de recursos, mas também a variações tecnológicas intra e inter períodos. Em decorrência, as variáveis explicativas constatadas no referido trabalho são válidas e devem nortear uma melhor alocação que, ao permitir elevação da eficiência das empresas, venha permitir a melhoria e ampliação dos serviços com reflexos positivos sobre o bem estar das populações afetadas.

5 REFERÊNCIAS

BANKER, R. D. (1993) Maximum likelihood, consistency and data envelopment analysis: a statistical foundation, *Management Science*, 39(10), pp. 1265-1273.

BERAN, R. (1986) Discussion of "Jackknife bootstrap and others resampling methods in regression analysis" by C. F. J. Wu. *Annals of Statistics*, 14, 1295-1298.

CARMO, C. M., TAVORA JUNIOR, J. L. (2003) Avaliação da Eficiência Técnica de Empresas de Saneamento Brasileiras utilizando a Metodologia DEA. Anais do XXXI Encontro Nacional de Economia – ANPEC, Porto Seguro.

CAVES, D. W.; CHRISTENSEN, L. R.; DIEWERT, W. E. (1982) The Economic Theory of Index Numbers and the Measurement of Input, Output and Productivity. *Econometrica*, 5, 1393-1414.

CHARNES, A.; COOPER, W. W.; RHODES, E. (1978) Measuring Efficiency of Decision Making Units. *European Journal of Operational Research*, 2, 429-444.

COELHO, F. J. M. (2004) Estudos de Sistemas Cadastrais de Empresas de Saneamento através de Benchmarking. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Cartográfica, Universidade Federal de Pernambuco.

FÄRE, R.; GROSSKPOF, S.; LINDGREN, B.; ROOS, P. (1992) Productivity changes in Swedish Pharmacies 1980-1989: A nonparametric approach. In *Journal of Productivity Analysis*, 3, 85-101.

FARRELL, M. J. (1957). The Measurement of Economic Efficiency. *Journal of the Royal Statistical Society*, 120, Series A Pt. III, 252-281.

FUJIWARA, T. (2005) A privatização beneficia os pobres? Os efeitos da desestatização do saneamento básico na mortalidade infantil. Anais do XXXII Encontro Nacional de Economia – ANPEC, Natal.

GIJBELS, I.; MAMMEN, E., Park, B. U.; SIMAR, L. (1999)
On estimation of monotone and concave frontier functions.
In Journal of the American Statistical Association, 94, pp. 220-228.

HALL, P.; TITTERINGTON, D. M.. (1989). The effect of simulation order on level of accuracy and power of Monte Carlo tests. In Journal R. Statistic Society B, 51, 459-467.

HALL, P.; HARDLE, W.; SIMAR, L. (1995). Iterated bootstrap with applications to frontier models. In Journal of productivity analysis, 6, 63-76.

HORRACE, W. C.; RICHARDS, S. O. (2004). Bootstrapping efficiency probabilities in parametric stochastic frontier models. Syracuse University, NY, (in press).

JENSEN, U. (2000). Is it efficiency to analysis efficiency ranking?
In Empirical Economics, 25, 189-208.

KOROSTELEV, A. ; SIMAR, L. ; TSYBAKOV, A. (1995a).
Efficient estimation of monotone boundaries. In The Annals of Statistics, 23, pp. 476-489.

KOROSTELEV, A. ; SIMAR, L. ; TSYBAKOV, A. (1995b). On estimation of monotone and convex boundaries. Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris XXXIX, 1, pp. 3-18.

KNEIP, A.; PARK, B.; SIMAR, L. (1998). A note on the convergence of nonparametric DEA efficiency measures. In Econometric Theory, 14, pp. 783-793.

SAMPAIO, B. R.; SAMPAIO, Y. S. B. (2006) Eficiência de Empresas de Saneamento Brasileiras: Determinantes Operacionais e Geográficos e Influências Políticas. Submetido para publicação.

SHERPARD, R. W. (1970). *Theory of Cost and Production Functions*. Princeton: Princeton University Press.

SILVERMAN, B. W. (1998). *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*. London: Chapman and Hall.

SIMAR, L (1992). Estimating efficiencies from frontier models with panel data: a comparison of parametric, non-parametric and semi-parametric methods with bootstrapping. In *Journal of Productivity Analysis*, 6, 63-76.

SIMAR, L.; WILSON, P. (1998) Sensitivity analysis of efficiency scores: How to bootstrap in nonparametric frontier models. In *Management Science*, 44, pp. 49-61.

SIMAR, L.; WILSON, P. (1999). Estimating and bootstrapping Malmquist indices. In *European Journal of Operational Research*, 115, pp. 459-471.

WILSON, P. (2007), FEAR 1.0: A package for frontier efficiency analysis with R. In *Socio-Economic Planning Sciences*, forthcoming.