

**“LET THE GAMES BEGIN! UMA AVALIAÇÃO DO RISCO ATUARIAL DE
SOCIEDADES DE CAPITALIZAÇÃO”¹**

**“LET THE GAMES BEGIN! AN ACTUARIAL RISK ASSESSMENT OF WITH-RAFFLE
SAVINGS SOCIETIES”**

Victor Manoel Janoski Pereira Martins

Graduado em Ciências Atuariais (USP)

Universidade de São Paulo (USP)

victorjanoski@usp.br

João Vinícius de França Carvalho

Doutor em Estatística (USP)

Universidade de São Paulo (USP)

jvfcarvalho@usp.br

RESUMO

Objetivo: Dimensionar a exposição de sociedades de capitalização à falência em função do capital de solvência. Essa classe é especial, pois diferentemente das seguradoras, para elas a aleatoriedade está na arrecadação ao invés dos sinistros (sorteios/resgastes), que são conhecidos desde o início do contrato.

Fundamento: Baseado na Teoria do Risco e da Ruína, operacionalizado pelo modelo de Cramér-Lundberg.

Método: Usando dados oficiais (SUSEP), propôs-se uma modificação no modelo de Cramér-Lundberg, incorporando a estrutura dos títulos de capitalização (sorteios e resgates). Para a simulação dos processos de risco, utilizou-se o Método de Monte Carlo.

Resultados: Há baixa necessidade de capitais, pois a probabilidade de ruína converge exponencialmente rápido para zero em todas as modalidades. Portanto, este mercado mostra-se sólido pois os capitais de solvência são baixos relativamente às receitas, ao mesmo tempo que a probabilidade de ruína é baixa.

Contribuições: Este trabalho contribui: (i) para a literatura sobre títulos de capitalização, que é escassa; (ii) sob a ótica gerencial, de maneira que investidores podem considerar as sociedades de capitalização como um atrativo investimento, e; (iii) para o regulador, ao dimensionar o capital mínimo requerido adequado para operação, cujos valores fixos podem não refletir o risco incorrido pelas sociedades de capitalização.

Palavras-Chave: Sociedades de Capitalização. Solvência. Teoria da Ruína.

¹ Artigo recebido em: 05/10/2023. Revisado por pares em: 02/03/2024. Reformulado em: 16/06/2024. Recomendado para publicação: 01/03/2025 por Anna Paola Fernandes Freire (Editor Adjunto). Publicado em: 04/11/2025. Organização responsável pelo periódico: UFPB

ABSTRACT

Objective: Sizing the exposure of raffle-linked savings account companies to bankruptcy according to solvency capital. This class is special because, unlike insurance companies, for them the randomness lies in the collection rather than the claims (raffles/rescues), which are known from the start of the contract.

Background: Based on the Theory of Risk and Ruin, operationalized by the Cramér-Lundberg model.

Method: Using official data (SUSEP), a modification in the classical Cramér-Lundberg risk model was proposed, by incorporating the structure of With-Raffle Savings Account (raffles and rescues). The Monte Carlo Method was applied to simulate the risk processes.

Results: There is little need for capital, as the probability of ruin converges exponentially quickly to zero in all modalities. This market is solid, as solvency capital is low in relation to revenues, while the probability of ruin is low.

Contributions: This paper contributes: (i) to the literature on with-raffle savings, which is scarce; (ii) from a managerial perspective, so that investors can consider with-raffle savings societies as an attractive investment, and; (ii) for the regulator, by sizing the minimum required capital suitable for operation, whose fixed values may not reflect the risk incurred by with-raffle savings societies.

Keywords: With-Raffle Savings Societies. Solvency. Ruin Theory.

JEL Codes: G22, G52, G32

1. INTRODUÇÃO

A Teoria da Ruína (Bowers et al., 1997) busca a compreensão do estado de solvência de uma seguradora, i.e., sua capacidade de manter-se financeiramente viável ao longo do tempo. Ao entrar no estado absorvente de ruína, uma entidade seguradora é declarada falida, não possuindo patrimônio líquido suficiente para honrar seus compromissos assumidos. Dessa forma, a estimação adequada da probabilidade de ruína de uma seguradora, permite desenhar estratégias ideais para a manutenção de suas operações precípuas: a subscrição de riscos (Bierth et al., 2015; Chen & Yuan, 2017; Kaserer & Klein, 2019).

A literatura científica atuarial é muito desenvolvida em duas vertentes: (i) métodos de estimação da probabilidade de ruína (Albrecher & Kantor, 2002; Gatto, 2020; Gatto & Mosimann, 2012), e; (ii) aplicações ao gerenciamento de risco atuarial de seguradoras (Carvalho & Cardoso, 2021; Dietz & Walker, 2019; Euphasio Junior & Carvalho, 2022; Tanaka & Carvalho, 2019), resseguradoras (Charpentier, 2010; Park & Xie, 2014; Santiago & Carvalho, 2020), operadoras de planos de saúde (Areias & Carvalho, 2021; Maia & Carvalho, 2020), e entidades de previdência complementar (Damasceno & Carvalho, 2021; Saad & Ribeiro, 2006; Valladão & Veiga, 2008; Waring & Siegel, 2007). Contudo, é surpreendentemente escassa para sociedades de capitalização (Franklin Jr. et al., 2013; Melo et al., 2012).

A partir dessa compreensão, é objetivo primário deste trabalho avaliar a solvência dessas entidades, que operam títulos de capitalização (TC). Trata-se de um produto originado na França, mas muito popular no Brasil. Em um TC, a lógica de um fluxo de caixa é inversa à de seguros. Enquanto para os produtos securitários a tarifação é atuarialmente justa desde o início da operação (i.e., o prêmio pago financia o valor esperado de um sinistro aleatório futuro), em um TC o valor do sinistro é conhecido desde o começo da operação, tanto o benefício de sorteio como a parcela capitalizável. Portanto, a aleatoriedade reside na capacidade de arrecadação da firma para angariar recursos suficientes para pagar os benefícios.

Para se ter uma ideia da relevância da movimentação financeira das sociedades de capitalização, segundo o Sistema de Estatísticas da Susep, entre janeiro de 2014 e março de 2022 as receitas

das entidades de capitalização totalizaram um acumulado nominal de R\$182.778.750.162, enquanto seus resgates e os valores pagos em sorteios são de R\$149.053.172.453 e R\$9.834.025.951, respectivamente. O maior percentual da série histórica de participação no PIB dos TC foi atingido em 2013 com 0,39%. Em 2020, em que o faturamento dos mercados supervisionados pela SUSEP foi de R\$274 bilhões, o mercado de TC alcançou quase R\$24 bilhões, mais de 8% do mercado segurador. Tudo indica que essa atividade econômica é não apenas viável, como relevante para a economia brasileira.

Há diferentes modalidades de desenhos de TC, cada qual com o seu objetivo. Há produtos exclusivamente destinados a jogos, provendo sorteios em dinheiro ou ativos. Há um tipo específico em que o resgate é cedido às entidades filantrópicas (e.g., hospitais). Em outros pode existir mecanismos de incentivos à educação financeira, em função da periodicidade de seus pagamentos, ou, finalmente, gerar instrumentos de garantia, como em casos de fiança de aluguéis de imóveis. Essa miríade de possibilidades pode promover distintas contribuições à sociedade, a depender da finalidade de seus diversos produtos.

O objetivo deste trabalho é avaliar os elementos básicos para a gestão de uma entidade de capitalização: probabilidade de ruína e seu capital mínimo requerido. Por meio da simulação do modelo clássico de risco de Cramér-Lundberg, a partir da calibração de parâmetros reais obtidos por meio das bases oficiais do regulador brasileiro. De maneira geral, as suposições básicas são de que, para essas entidades, a aleatoriedade de seus produtos está contida na parcela que rege a arrecadação e venda de seus produtos, em especial a quantidade de pessoas que adquirirão os títulos ofertados.

A motivação desta pesquisa é compreensão melhor como está o estado de solvência de entidades de capitalização. Além disso, não apenas a probabilidade de ruína será avaliada, mas também o dimensionamento de capital mínimo requerido. Esse tema é relevante para o entendimento de qual o papel do TC em nossa sociedade, uma vez que este é um assunto pouco estudado e compreendido em território nacional. Isso vale desde acadêmicos, passando por especialistas financeiros e atingindo a população em geral.

Afinal, a adoção de uma taxa de juros e uma taxa de correção da inflação semelhantes às adotadas em cadernetas de poupança, gera-se confusão entre os investidores participantes sobre sua qualidade como instrumento financeiro (SANTOS et al., 2018). Assim, há um estigma e preconceito da sociedade com os TC, uma vez que as pessoas não compreendem sua real colocação entre os produtos ofertados. É preciso, destarte, entender que o TC não é um investimento, mas um produto financeiro capaz de promover medidas transformadoras ao tecido social (e.g., educação financeira, filantropia, fidelização de clientes ou garantia em contratos com riscos financeiros).

1.1 Descrição da tipologia e história dos Títulos de Capitalização

Um TC é um produto financeiro em que parte dos pagamentos realizados pelo subscritor é usado para formar um capital, segundo cláusulas e regras aprovadas e mencionadas no próprio título (i.e., nas Condições Gerais) e que será pago em moeda corrente num prazo máximo estabelecido. O restante dos valores dos pagamentos é usado para custear os sorteios, quase sempre previstos neste tipo de produto e as despesas administrativas das sociedades de capitalização.

Segundo a SUSEP, na esfera legal, o TC é regulamentado a partir do Decreto-Lei nº 261, de 28 de fevereiro de 1967, em que dispõe sobre as operações das Sociedades de Capitalização, sendo referenciado artigos do Decreto-Lei nº 73, de 21 de novembro de 1966. Na esfera infralegal, a operação de capitalização, suas modalidades, sua operação e comercialização, estão dispostos na Resolução CNSP nº 384/2020, enquanto a Circular SUSEP nº 656/2022 estabelece regras e critério sobre a elaboração, a operação, a distribuição, a cessão, a subscrição, a publicidade e a comercialização de TC. Além disso, o TC só pode ser comercializado pelas Sociedades de Capitalização devidamente autorizadas pelo regulador a funcionar, e por entidades filantrópicas.

No Brasil, a SUSEP estabelece atualmente que os TC no mercado brasileiro possuem 3 tipos e 6 modalidades. Os tipos são diferenciados pela forma de pagamento: PM, PP e PU. O PM é um título que possui um pagamento mensal em relação ao período de vigência. O PP, por sua vez, é um título em que não há correspondência entre os meses vigentes do título e seu número de pagamentos. Enquanto o PU é um título em que o pagamento é único. Suas modalidades são: (i) *Compra-Programada*; (ii) *Filantropia Premiável*; (iii) *Incentivo*; (iv) *Instrumento de Garantia*; (v) *Popular*, e; (vi) *Tradicional*.

A Tabela 1 traz as características principais de cada uma das modalidades dos TCs:

Tabela 1. Critérios atribuídos à diferenciação das modalidades de TC.

Modalidades	Critérios
Compra-Programada	O titular pode optar por bem ou serviço, descrito na ficha de cadastro, subsidiado por acordos comerciais com indústrias ou empresas comerciais. Praticamente não está mais sendo comercializada.
Filantropia Premiável	Destinada ao consumidor interessado em participar de sorteios, lhe sendo facultada a opção de contribuir com entidades beneficentes de assistência sociais, por meio da cessão a essas entidades do direito de resgate do saldo capitalizado.
Incentivo	O TC está vinculado a promoções comerciais instituídas por empresas promotoras (subscritoras do título), sendo que o consumidor tem direito apenas a participar dos sorteios, sem acesso ao resgate do saldo capitalizado, que pertence ao subscritor do título.
Instrumento de Garantia	O titular pode utilizar o saldo de capitalização do título para assegurar o cumprimento de obrigação assumida em contrato principal pelo titular perante terceiro. O saldo capitalizado não pode ser utilizado para aquisição de bem ou serviço.
Popular	Esta modalidade tem por objetivo a participação do titular em sorteios, propiciando, ao final da vigência, devolução de valor inferior ao total pago. Nesta modalidade, as Condições Gerais deverão conter, em destaque, a seguinte mensagem: "Este título restituirá ao final de sua vigência valor inferior ao total dos pagamentos efetuados. A contratação deste título é apropriada principalmente na hipótese de o consumidor estar interessado em capitalizar parte da contribuição e participar dos sorteios. Consulte a tabela para observar a evolução do percentual de resgate, de acordo com os meses de vigência do título."
Tradicional	Trata de modalidade que objetiva restituir ao titular, ao final do prazo de vigência, no mínimo, o valor total dos pagamentos efetuados pelo subscritor, pessoa que adquiriu o título, desde que todos os pagamentos previstos tenham sido realizados nas datas programadas.

Fonte: Elaborado pelo autor, com base em informações da Susep.

Já o *Prazo de Pagamento* é o período em que o adquirente do título, deve realizar os pagamentos, enquanto o *Prazo de Vigência* é o período durante o qual o título é administrado pela sociedade de capitalização.

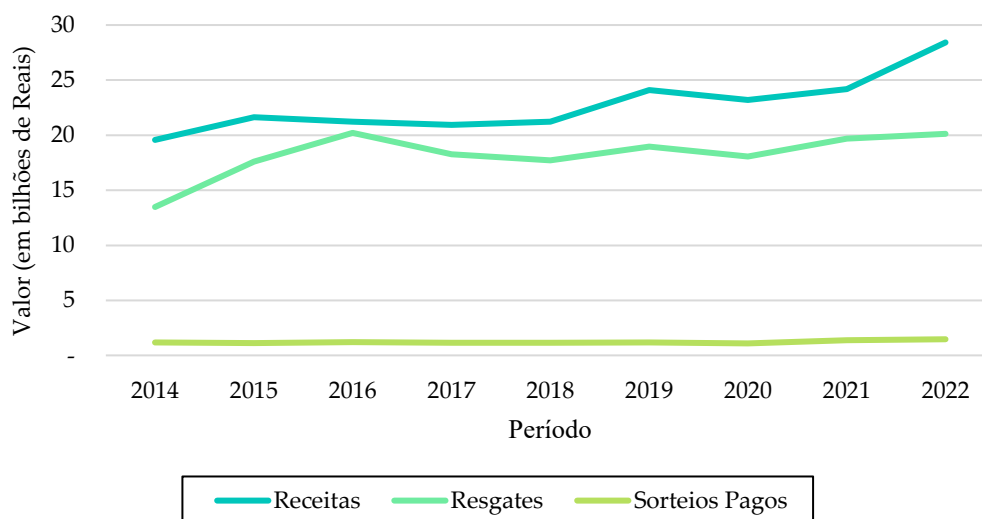
Os TC são estruturados em três cotas, que representam a destinação dos recursos: capitalização, sorteio e carregamento. De acordo com a SUSEP, a *cota de capitalização* representa o percentual de cada pagamento que financiará constituição de capital, tendo esse capital chamado de provisão matemática para resgate. Já a *cota de sorteio* é vertida para o pagamento dos prêmios sorteados. Por fim, a cota de carregamento se refere aos custos de despesas do produto (e.g., corretagem, despesas administrativas, emissão).

Segundo Amador (2002), o inventor do produto financeiro de capitalização foi Paul Verger. De acordo com um tratado de Anatole Weber, Paul Verger desenvolveu, na metade do século XIX na França, uma sociedade formada por 250 associados, cada qual contribuía com 10 centavos de

francos semanais, para a constituição de um fundo, a fim de se realizar sorteios em datas festivas (Páscoa, São João e Natal). Assim foi criada a primeira sociedade de capitalização, que ficou conhecida como “Le Verger”. Embora ela não tenha sobrevivido, o modelo prosperou com o passar do tempo, incorporando mudanças e se difundindo na sociedade francesa. Esse modelo foi rebatizado de “Reconstituição de Capital”. Ao longo do tempo, a tradução de sua principal fonte de informação história (o tratado de Anatole Weber) teve suas versões enfeitadas e modificadas (Amador, 2002), a ponto de surgir a versão conhecida nos principais trabalhos acadêmicos brasileiros do tema. A literatura brasileira (Melo et al., 2012) atribui a invenção do TC a Paul Viget e sua cooperativa de mineiros.

O TC é um importante produto financeiro no mercado brasileiro, apresentando faturamento anual bilionário (Figura 1). Entretanto, é um produto subvalorizado pela sociedade brasileira e pelos especialistas financeiros, que o considera um péssimo investimento devido a seu baixo retorno. Contudo, avaliar apenas a perspectiva de retorno não é ideal, uma vez que, como trazido pela Tabela 1, há diferentes motivações para a sua existência. Grande parte dessa compreensão negativa é derivada do próprio mercado brasileiro, que utiliza este produto como parte de suas gerações de receitas e arrecadações, de forma a enganar o consumidor.

Figura 1. Evolução temporal das receitas, resgates e sorteios pagos no mercado de títulos de capitalização no Brasil (2017-2022).



Fonte: Elaboração própria, com base em dados oficiais do Sistema de Estatísticas da Susep.

Segundo Amador (2002), apesar de operarem sob o rigor da lei e da matemática, havia empresas no final do século XIX que não se envergonhavam de prometer o que não cumpririam. Assim, os títulos emitidos como “Reconstituição de Capital” começaram a ser colocados sob suspeita pela Corte de Justiça de Paris, que passou a considerar a hipótese de “*sob a máscara diáfana e honesta da ideia de poupança de longo prazo acumulada com sorteios, alguma espécie mal conformada de loteria. Isto é, jogo!*”. A Corte de Cassação (tribunal de Segunda Instância Francês), em 26 de abril de 1902, emitiu sentença favorável à capitalização. Com sua regulamentação, tornou-se uma potência econômica, em 1936, o total de capitais garantidos era superior a 35 bilhões de francos, e em 1939, existia 1 TC para cada 4 franceses.

Diferentemente de seu desenvolvimento na França, onde demorou mais de meia década para regulamentar após seu surgimento, no Brasil primeiro ocorreu a regulamentação, e só anos depois a iniciativa privada começou a desenvolver este produto. O Decreto nº14.593, de 31 de dezembro de 1920, é o marco do início da capitalização brasileira (Amador, 2002). Há um excerto muito interessante:

“em nosso País, muito antes de ser adotada, a Capitalização mereceu referências jurídicas que concordavam inteiramente com o ponto de vista dos legisladores franceses. Isso prova como, apesar de constituirmos uma Nação nova, todos os problemas humanos nos interessam de perto, como seguimos e nos deixamos entusiasmar pelos legítimos progressos do engenho e da arte, assimilando-os de logo e dando-lhes feição própria, de acordo com o nosso temperamento e as nossas tendências. No tocante à capitalização, o legislador brasileiro antecipou-se aos fatos, estudou-os antes de serem realidade no País e a eles referiu-se em texto de Lei!”
(Schiotti, 1948).

Ainda segundo Amador (2002), em 4 de setembro de 1929, o Presidente Washington Luís assinou o Decreto nº18.891, autorizando a operação da primeira sociedade de capitalização no Brasil (Sociedade Anônima Sul América – Capitalização). Antônio Sanchez de Larragoiti Junior, Diretor Presidente do Grupo Sul América, ao conhecer o produto em uma viagem a Paris, acreditou que o produto era viável a economia brasileira, frente à grave crise financeira mundial (de 1929) que enfrentavam.

Durante sua consolidação no Brasil, o TC tornou-se relevante, chegando a possuir, em 1939, uma carteira com quase quatro milhões de contos de réis (Amador, 2002). Contudo, pelo aumento da inflação, os títulos de capitalização perdiam seus valores reais, por não haver correção monetária.

Com a correção monetária instituída pelo governo por meio da Lei nº 4.357, de 16 de julho de 1964, a capitalização ganhou novas condições para manter seus valores reais, mas sem obter bons resultados. Com a criação do débito automático na década de 1980, as sociedades de capitalização tornaram-se atrativas para os bancos, uma vez que o método de pagamento criava uma fidelização com os clientes, com menores possibilidades de inadimplência (Melo et al., 2012). Essa parceria estratégica entre bancos e seguradoras (prática conhecida como *bancassurance*) é o principal canal de comercialização de seguros dos ramos de vida e previdência no Brasil (J. V. F. Carvalho & Guimarães, 2022), além de também sê-lo para os TC até hoje.

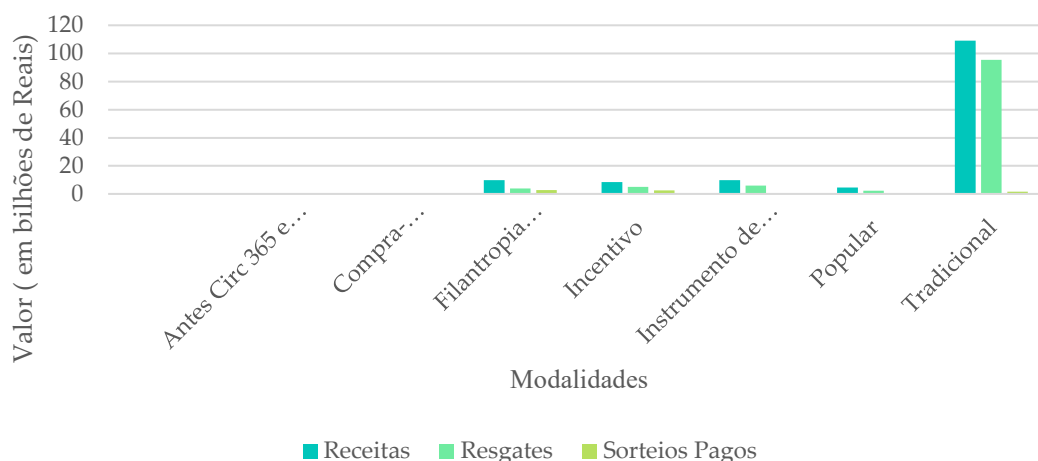
Com a estabilização econômica do Plano Real em 1994, o mercado de capitalização cresceu e atingiu importantes patamares na economia brasileira. Com faturamentos anuais superiores a 20 bilhões de reais desde 2015, os TC se tornaram presentes na vida do brasileiro de diferentes maneiras: desde a disciplina financeira para o acúmulo de reservas financeiras pessoais, ou como fiança locatícia ao alugar um imóvel, ou contribuir para entidades filantrópicas, jogos puros, ou até mesmo ao participar de um sorteio em estabelecimentos comerciais (e.g., supermercado, *shopping centers*). Embora exposto à sociedade, a população não possui noção da dimensão da relevância dos títulos brasileiros e suas múltiplas interações no tecido social.

Mesmo com a crise financeira desencadeada pela crise sanitária decorrente da pandemia de Covid-19, o setor de TC mostrou solidez e robustez a adversidades. Embora tenha havido uma redução nas receitas dos títulos, os resultados do mercado se mantiveram estáveis, decorrentes do rápido desenvolvimento das modalidades de TC lançadas em 2018 com o marco regulatório - Circular SUSEP nº569 de 02/05/2018 - (Figura 1). Ademais, observa-se que há um descolamento da tendência das receitas em relação aos resgates. Essa distância sugere a ampliação do lucro das sociedades de capitalização. Assim, há evidências de que o mercado de TC é não apenas maduro, mas também robusto.

Pela Figura 2 nota-se que entre as modalidades presentes no mercado, a modalidade *Tradicional* possui ampla dominância do mercado, seguido pelas modalidades de *Filantrópia Premiável* e *Instrumento de Garantia* (ambas desenvolvidas só em 2018), com receitas superiores a R\$3 bilhões em 2022. Destaca-se que a modalidade *Compra-Programada* está em desuso, com os últimos dados disponíveis no sistema da SUSEP de 2019. Constam das bases disponíveis no Sistema de Estatística da

SUSEP (SES) dados referentes a antes da Circular Susep nº365/2008. Além deles, alguns dados não puderam ter suas modalidades identificados.

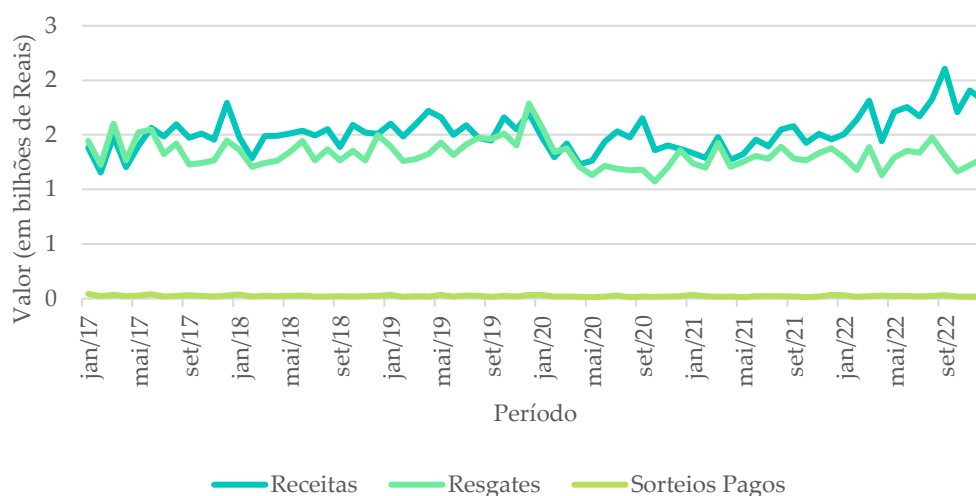
Figura 2. Importância total de cada modalidade de títulos de capitalização (2017-2022).



Fonte: Elaboração própria, com base em dados oficiais do Sistema de Estatísticas da Susep.

Entre 2017 e 2022, a modalidade *Tradicional* teve mais de 75% de participação entre as receitas e mais de 85% de participação entre os resgates de TC. No entanto, apenas 23,14% de participação entre os sorteios. Essa disparidade é refletida pela natureza da modalidade, em que se busca retornar ao subscritor todos os pagamentos realizados, ao invés de oferecer sorteios de parte dos pagamentos. Em alguns períodos, é possível observar resgates maiores que as receitas. Como é um produto de longo prazo, em que busca o pagamento periódico a fim de constituir elevado montante, não necessariamente as sociedades de capitalização tiveram prejuízos. As penalidades aplicadas para resgates antecipados podem contribuir para assegurar a saúde financeira das instituições de capitalização.

Figura 3. Evolução mensal das parcelas financeiras da modalidade *Tradicional* (2017-2022).

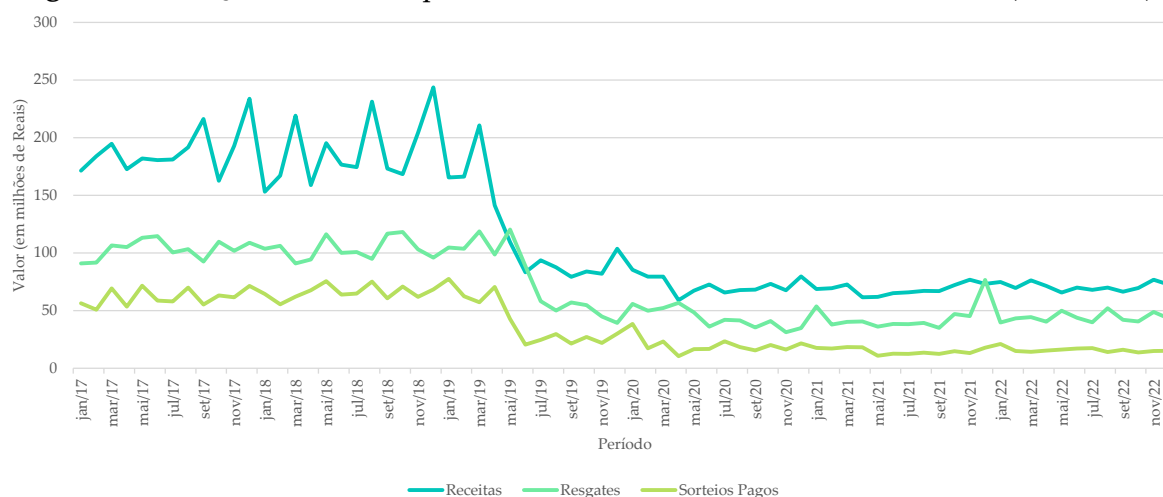


Fonte: Elaboração própria, com base em dados oficiais do Sistema de Estatísticas da Susep.

Pela Figura 4, nota-se que a modalidade *Incentivo* apresenta, em alguns períodos, um volume maior de resgates e sorteios pagos quando comparados às receitas. Isto pode ser percebido em 3 diferentes momentos. Primeiro em 2019, quando teve uma grande queda de resultados. Isso ocorreu devido a regulação da modalidade *filantropia premiável*, que, até então, era vendida por meio de um certificado de contribuição lastreado por um TC de modalidade incentivo. Por se tratar de uma

modalidade ligada diretamente a campanhas promocionais de empresas, é possível justificar tais prejuízos como decorrência da pandemia de Covid-19.

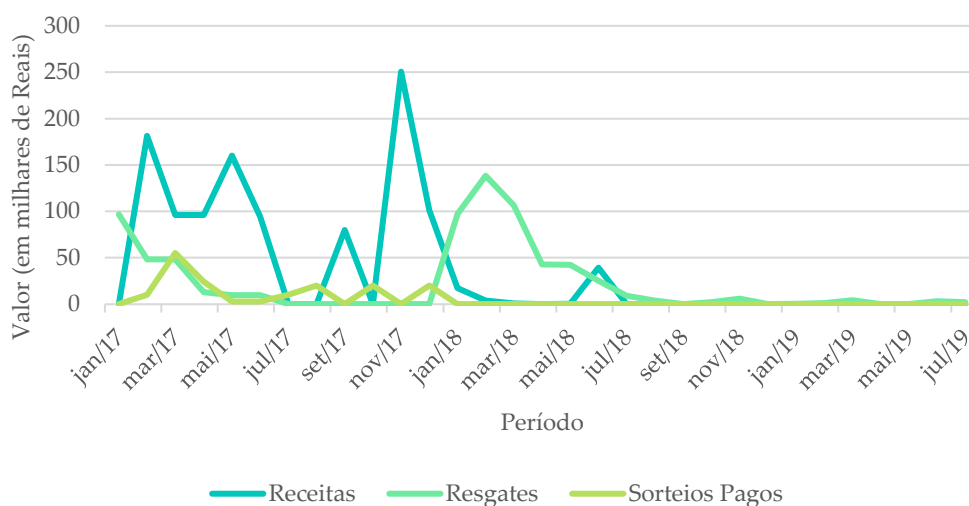
Figura 4. Evolução mensal das parcelas financeiras da modalidade *Incentivo* (2017-2022).



Fonte: Elaboração própria, com base em dados oficiais do Sistema de Estatísticas da Susep.

No final da segunda década de 2000, a modalidade *Compra Programada* foi perdendo relevância, se encontrando praticamente extinta na atualidade (Figura 5). Com a facilidade do crédito das empresas de varejo, a compra programada deixou de ser interessante. Com resultados inexpressivos nos últimos anos, essa modalidade foi abandonada pelas sociedades de capitalização.

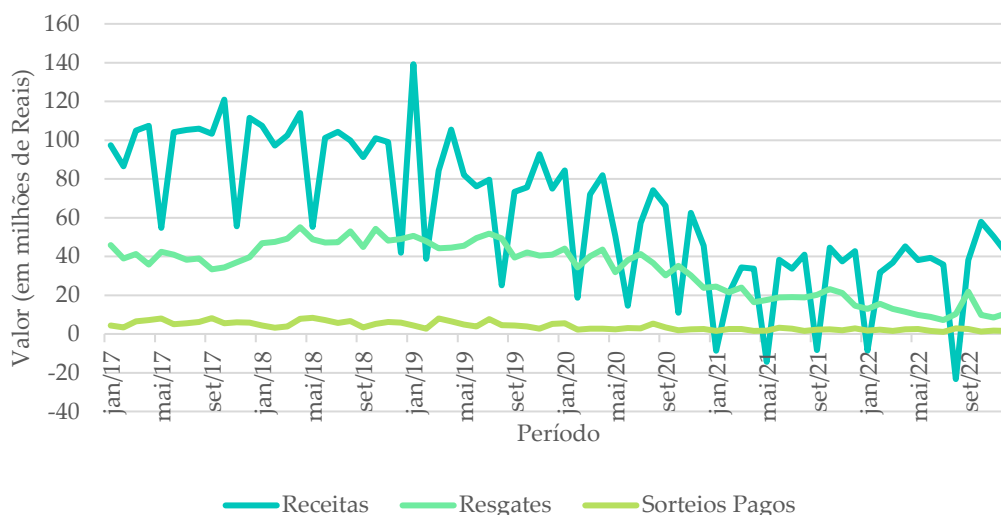
Figura 5. Evolução mensal das parcelas financeiras da modalidade *Compra Programada* (2017-2022).



Fonte: Elaboração própria, com base em dados oficiais do Sistema de Estatísticas da Susep.

A modalidade *Popular* abriga o TC de maior conhecimento da sociedade brasileira: a Tele Sena. Pela Figura 6, observa-se que, muito embora os resgates possuam certa continuidade, as receitas são extremamente voláteis, de forma a apresentar, constantemente, resgates maiores que suas receitas. Esse comportamento sugere ciclos em que mensalmente a capacidade de venda é alternada, como se fosse um período necessário para que o consumidor retorne a consumir.

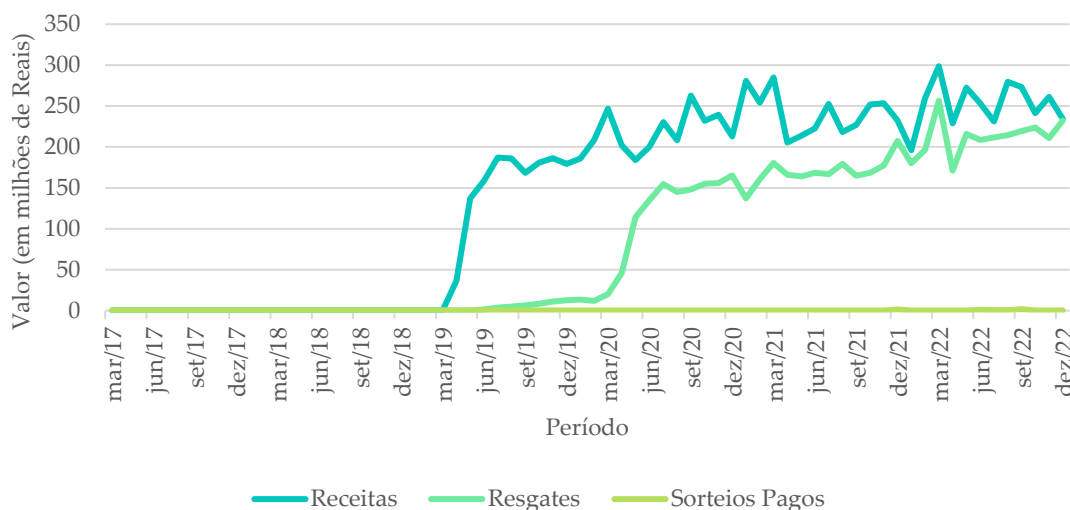
Figura 6. Evolução mensal das parcelas financeiras da modalidade *Popular* (2017-2022).



Fonte: Elaboração própria, com base em dados oficiais do Sistema de Estatísticas da Susep.

Já a Figura 7 traz a modalidade *Instrumento de Garantia*. Instituída em 2019, já mostra grandes sinais de aderência ao mercado brasileiro, com resultados bilionários anualmente. Dada a característica do produto garantido, tipicamente o aluguel, é esperado essa defasagem ente as receitas e os resgates. Nota-se que os sorteios são virtualmente inexistentes, com os resgates tendo um comportamento parecido as receitas, sem a distância observada no início da criação.

Figura 7. Evolução mensal das parcelas financeiras da modalidade *Instrumento de Garantia* (2017-2022).

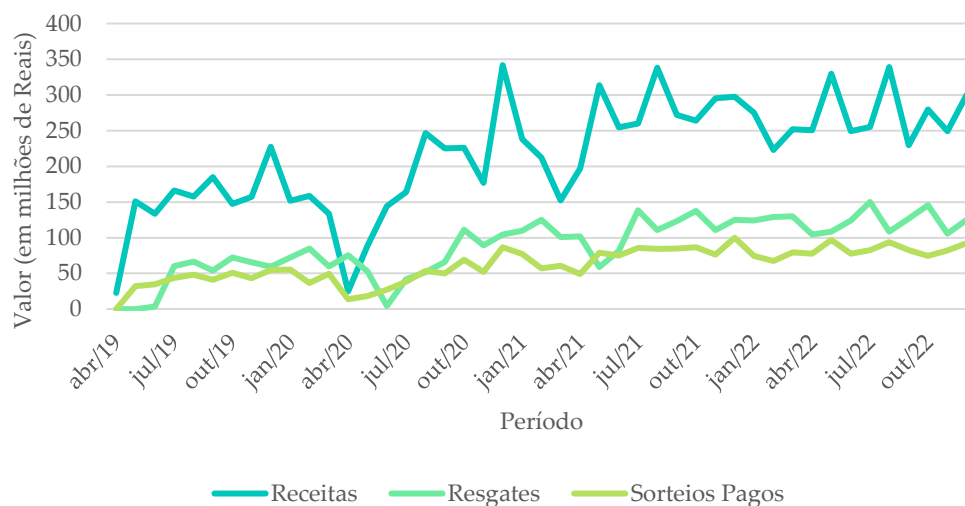


Fonte: Elaboração própria, com base em dados oficiais do Sistema de Estatísticas da Susep.

Por sua vez, a modalidade *Filantropia Premiável* foi desenvolvida a partir da modalidade anterior (i.e., *Incentivo*), operacionalizada por meio de certificados de contribuição. Observa-se, pela Figura 8, uma grande margem entre as receitas e os resgates. Nesta modalidade, os sorteios são expressivos pela natureza de destinação social: com a proposta de cessão dos resgates para entidades filantrópicas. Em dois períodos é possível observar uma queda de arrecadação: em abril de 2020 e 2021, possivelmente decorrente da pandemia. É possível também observar uma leve defasagem entre as receitas e os resgates, tendo seus impactos refletido um pouco depois que as receitas. Com

grande mercado nos menores centros urbanos, os principais títulos desta modalidade buscam desenhar sorteios em que parte do valor arrecadado (cota de capitalização) é cedida a hospitais com grande importância em suas regiões. Com o apoio de filiais de redes de televisão, os sorteios são transmitidos ao vivo para toda a área participante. Nesses sorteios, os menores prêmios são sorteados para criar volume, expandindo o número de vencedores e, conseqüentemente, o de cidades premiadas, gerando grande engajamento social.

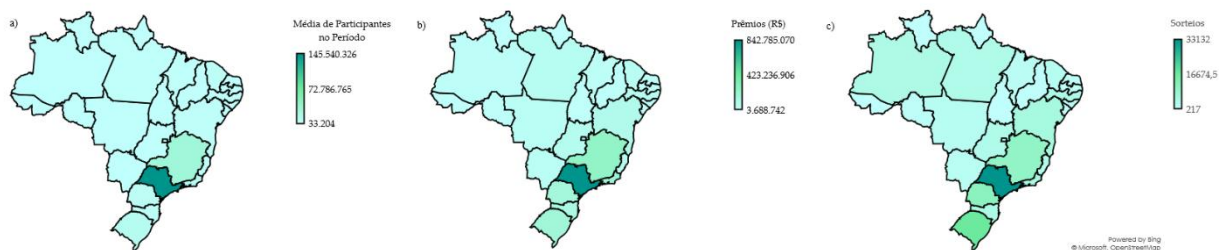
Figura 8. Evolução mensal das parcelas financeiras da modalidade *Filantropia Premiável* (2017-2022).



Fonte: Elaboração própria, com base em dados oficiais do Sistema de Estatísticas da Susep.

A partir da Figura 9 é possível observar as distribuições do TC ao redor do Brasil. Há grande predominância da região Sudeste, com destaque para o estado de São Paulo. Também há congruência entre a quantidade de títulos ofertados, os sorteios e os resgates. Essa dominância do Sudeste revela que as sociedades de capitalização, que faturam quase R\$30 bilhões, ainda possuem grande mercado a ser explorado no Brasil.

Figura 9. Painel descritivo da (a) densidade de participantes, (b) prêmios arrecadados, e (c) sorteios por unidade da federação (jan/2023).



Fonte: Elaboração própria, com base em dados oficiais do Sistema de Estatísticas da Susep.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO DA LITERATURA

A Teoria da Ruína foi desenvolvida com os trabalhos de Lundberg (1903) e aperfeiçoada por Cramér (1930), dando origem ao modelo estocástico mais tradicional da literatura atuarial: Cramér-Lundberg. Este modelo de risco tem por objetivo descrever a evolução temporal do patrimônio líquido de entidades seguradoras. Genericamente, o patrimônio de uma empresa em um determinado tempo t é resultado do acréscimo das receitas (pré-definidas) de prêmios com os decréscimos dados pelos dispêndios (aleatórios) decorrentes de indenizações de sinistros segurados por ela em um período anterior ($t - 1$).

Bowers et al. (1997) fazem uma compilação abrangente dos trabalhos que visaram aperfeiçoar o clássico modelo de Cramér-Lundberg. Afinal, como argumentam os autores, só há soluções analíticas para a probabilidade de ruína no caso em que os sinistros agregados possuem forma funcional de uma convolução entre uma Poisson (para a frequência aleatória) e uma Exponencial (para a severidade aleatória). Diante dessa limitação, a literatura atuarial recente buscou obter as melhores aproximações possíveis para a probabilidade de ruína (de Vylder, 1977b).

Obter uma boa aproximação para a probabilidade de ruína é fundamental para a determinação de capitais de solvência (Gupta & Prakash, 2018; Oliveira et al., 2017; Wüthrich, 2015), montante alocado no patrimônio líquido de seguradoras e congêneres com o objetivo de fazer frente aos gastos inesperados para além do já dimensionado em provisões técnicas (Carvalho & Carvalho, 2019). O capital de solvência é elemento central na gestão atuarial moderna: é requisito obrigatório do acordo *Solvency II*, oficial da União Europeia (Moro & Krvavych, 2017) e modelo para as diretrizes regulatórias adotadas no Brasil (Carvalho & Cardoso, 2021), e também dos novos padrões contábeis internacionais IFRS17, que entrará em vigor em jan/2023 (England et al., 2019).

Com a evolução do poder computacional, a Teoria da Ruína deixou de ser tratada apenas analiticamente e diversos trabalhos começaram a testar numericamente a precisão dos algoritmos propostos (Asmussen, 1985; de Vylder, 1977a; Dufresne & Gerber, 1989). Mais recentemente, diversos pesquisadores têm conjugado diversos modelos físicos com algoritmos mais sofisticados, conseguindo incorporar muito mais complexidade do mundo real aos métodos desenvolvidos (Badaoui & Fernández, 2013; Chen & Yuan, 2017; Cheng et al., 2016; Cossette et al., 2018; Ramsden & Papaioannou, 2019).

Uma literatura mais aplicada à realidade das seguradoras também tem sido desenvolvida, em particular para decisões gerenciais, incorporando a escolha de resseguro ótimo (Albrecher & Haas, 2011; Charpentier, 2010; Kasumo et al., 2018). Inclusive para o caso brasileiro: Euphasio Junior & Carvalho (2022) avaliam que a adoção de contratos de resseguro é uma excelente estratégia de mitigação da probabilidade de ruína em processos de risco de diversos ramos securitários, em especial os que apresentam distribuições de severidade de caudas pesadas. Já Areias & Carvalho (2021) sugerem que no segmento de saúde suplementar não é qualquer instrumento de resseguro que ajuda a reduzir a probabilidade de ruína. O tratado proporcional quota-parte apresenta resultados favoráveis, enquanto o resseguro não proporcional *stop-loss* gera resultados de agravamento na probabilidade de ruína. A razão para isso é o custo do tratado para a cedente.

A interação dos riscos de subscrição com os riscos de mercado também são objeto recorrente na literatura (Hipp & Plum, 2003; Menoncin & Vigna, 2017; Ramsden & Papaioannou, 2019). Carvalho & Cardoso (2021) incorporam os efeitos do risco de mercado, modificando o clássico modelo de Cramér-Lundberg. Por meio de simulações, evidenciam que a rentabilização dos ativos pode mitigar os custos de oportunidade da seguradora ao reduzir a alocação de Capital de Solvência. E há extensa literatura internacional incorporando métodos estatísticos de estruturas de dependência (Dickson & Qazvini, 2016; Dong & Wang, 2018), além de modelos físicos, via processos de Hamilton-Jacobi-Bellman (Badaoui & Fernández, 2013; Xu et al., 2018) ou de mecânica quântica (Tamturk &

Utev, 2018) para compreender o efeito da dinâmica de diferentes carteiras de ativos sobre a probabilidade de ruína de (res)seguradoras.

Como se nota, a literatura da Teoria da Ruína é prolífica em tratar da dinâmica operacional de seguradoras, resseguradoras, operadoras de planos de saúde e entidades de previdência complementar. Porém, não há literatura disponível para avaliar a solvência patrimonial de sociedades de capitalização usando a teoria do risco coletivo e processos estocásticos (Franklin Jr. et al., 2013; Melo et al., 2012). O mais próximo é (Abreu, 2012), que estudou a viabilidade de operação de uma sociedade de capitalização em Portugal, usando diferentes indicadores de avaliação, sendo a solvência deles, mas usado de forma distinta. Essa é a lacuna que este trabalho pretende preencher: usar técnicas e instrumentos atuariais consagrados (i.e., processos de risco, capital de solvência e probabilidade de ruína) para avaliar a situação financeira de sociedades de capitalização.

3. METODOLOGIA

Conforme Bowers et al. (1997), o modelo clássico de Cramér-Lundberg possui a seguinte estrutura matemática:

$$U_t = U_0 + P_t - S_t, \text{ para } t \geq 0 \quad (1)$$

em que U_t denota o capital de uma entidade securitária em determinado instante de tempo t , P_t é o montante de prêmios no instante t , recebidos a uma taxa constante $c = (1 + \theta) \times E[S_{Ag}]$ para o intervalo $[0, t)$, com $\theta > 0$ denotando a margem de segurança, e $S_t = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ o sinistro agregado ocorrido em t . Note que U_0 representa o capital de solvência (inicial) da firma, ou seja, o capital mínimo requerido para iniciar as suas atividades em determinado ramo de seguros, sendo este o objeto secundário de nossas análises.

Para seguradoras, enquanto os prêmios são fixos e pré-determinados, a parcela aleatória da Equação 1 é o sinistro agregado, obtido a partir de uma convolução de duas variáveis aleatórias importantes para a dinâmica de um contrato de seguro: a frequência e a severidade dos sinistros. Porém, em TC, acontece o inverso: o sinistro é uma quantidade fixa e pré-determinada e o volume de prêmios arrecadados é a variável aleatória de interesse. Portanto, neste trabalho, a parcela P_t será um somatório de prêmios unitários fixados (PU) com uma quantidade aleatória $N(t)$ de parcelas, seguindo uma distribuição de Poisson com parâmetro definido λ , definido por:

$$P_t = \sum_{i=1}^{N(t)} PU \quad (2)$$

Ademais, para além da receita, outra componente aleatória é a possibilidade de resgates. Assim, pode-se reescrever a clássica Equação 1 usando a seguinte estrutura:

$$U_t = U_0 + P_t - S_t - R_t \quad (3)$$

em que S_t representa os sorteios pagos no período e R_t , os resgates. Para as simulações deste processo de risco, definem-se 7 parâmetros, descritos na Tabela 2.

Tabela 2. Descrição dos parâmetros para simulação do modelo de risco proposto

Variáveis do Processo de Risco Modificado	
$U_t = U_{t-1} + P_t - S_t - R_t$	Cramér-Lundberg Modificada
U_0 ($t = 0$ é uma convenção para determinar o capital inicial)	Variável de entrada: Diferentes capitais (entre R\$0 e R\$1bilhão)
$N_{sim} = 5000$	Variável de entrada: Quantidade de possíveis trajetórias simuladas para cada cenário.
$N_{períodos} = 120$	Variável de entrada: Quantidade de períodos que cada cenário será simulado.
Sorteios_Pagos	Variável de entrada: Média mensal do valor de resgates pagos entre 2014 e 2022.
Resgates_Pagos	Variável de entrada: Média mensal do valor de sorteios pagos entre 2014 e 2022.
Quantidade_Média	Variável de entrada: Quantidade média de títulos vendidos.
Preço_Médio_individual	Variável de entrada: Preço médio de 1 título vendido, definido pela razão entre a receita média e a quantidade média de títulos vendidos.

Fonte: Elaboração própria.

Assim, por meio da Equação 1, define-se a variável aleatória T como o primeiro instante de tempo em que a ruína ocorre:

$$T = \min\{t: t \geq 0, U_t < 0\}, \quad (3)$$

Com a definição do critério de parada dado pela Equação 3, a medida de probabilidade associada ao processo estar declarado em estado de ruína é dada por:

$$\psi(U_0) = \mathbb{P}(T < \infty | U_0). \quad (4)$$

Ou, de maneira equivalente, mas ligada ao processo definido pela Equação 1:

$$\psi(U_0) = \mathbb{P}[U_t < 0 | U_0]. \quad (5)$$

Há diversas formas de se estimar a probabilidade uma maneira de estimar a probabilidade de ruína (Baumgartner & Gatto, 2010; Gatto & Mosimann, 2012). Neste trabalho, serão calibrados os parâmetros e realizadas simulações por meio do Método de Monte Carlo (MMC), que é um processo estável e que produz estimativas não enviesadas (Gatto, 2020). De maneira geral, simula-se diversas realizações de trajetórias futuras do processo definido pela Equação 1 e avalia-se o número de vezes em que uma entidade possui seu capital ou negativo nas simulações de cenários futuros.

$$\hat{\psi}(U_0) = \frac{\#(U_t < 0, t > 0)}{n}. \quad (6)$$

Os parâmetros foram calibrados usando dados reais do setor, a partir das bases de dados disponibilizadas no Sistema de Estatística da SUSEP (SES), que agrupam informações do mercado de TC. As principais são: (i) receitas, resgates e sorteios pagos, e; (ii) as quantidades de títulos. Todos

os valores financeiros foram corrigidos pela inflação usando o IPCA mensal. Na Tabela 3, encontram-se as estatísticas descritivas.

Tabela 3. Estatísticas descritivas das bases do SES (em milhões de R\$).

	Estatística	Receitas	Resgates	Sorteios Pagos
Total	Média	2.430,61	1.955,49	131,02
	DP	289,07	267,65	27,00
	Mediana	2.374,04	1.910,56	127,48
	Total	262.506,02	211.192,64	14.150,28
Tradicional	Média	1.933,61	1.696,50	38,35
	DP	316,18	328,39	20,42
	Mediana	1.909,90	1.666,71	33,10
	Total	208.829,93	183.221,75	4.141,85
Popular	Média	142,05	65,90	20,71
	DP	118,86	55,08	28,74
	Mediana	118,87	55,31	6,42
	Total	15.341,40	7.117,56	2.236,94
Incentivo	Média	148,78	87,72	42,66
	DP	71,55	36,81	28,84
	Mediana	124,19	83,41	27,06
	Total	16.067,84	9.473,43	4.606,77
Filantropia Premiável	Média	241,64	98,27	68,90
	DP	75,87	40,09	23,21
	Mediana	250,92	106,31	70,09
	Total	10.873,82	4.422,19	3.100,43
Instrumento de Garantia	Média	248,88	142,70	0,19
	DP	44,90	85,37	0,35
	Mediana	246,98	184,76	0,09
	Total	11.199,41	6.421,55	8,55
Antes Circ 365 e Não Adequado	Média	0,52	4,52	0,24
	DP	0,78	12,25	0,74
	Mediana	0,06	0,56	0,03
	Total	55,62	488,34	26,41
Compra Programada	Média	0,02	0,01	0,00
	DP	0,06	0,03	0,01
	Mediana	0,00	0,00	0,00
	Total	2,16	1,06	0,30
Sem Identificação	Média	1,26	0,43	0,27
	DP	6,76	1,89	1,37
	Mediana	0,02	0,00	0,00
	Total	135,84	46,76	29,02

Fonte: Elaboração própria.

Destacam-se alguns elementos: primeiro, os baixos valores de sorteios ao compará-los com os resgates, o que é refletido pela dominância da modalidade *Tradicional*, cujo foco está na acumulação de recursos. Ademais, a modalidade *Popular* possui um elevado desvio-padrão relativo à média, possivelmente decorrente do ciclo em que os títulos da modalidade operam.

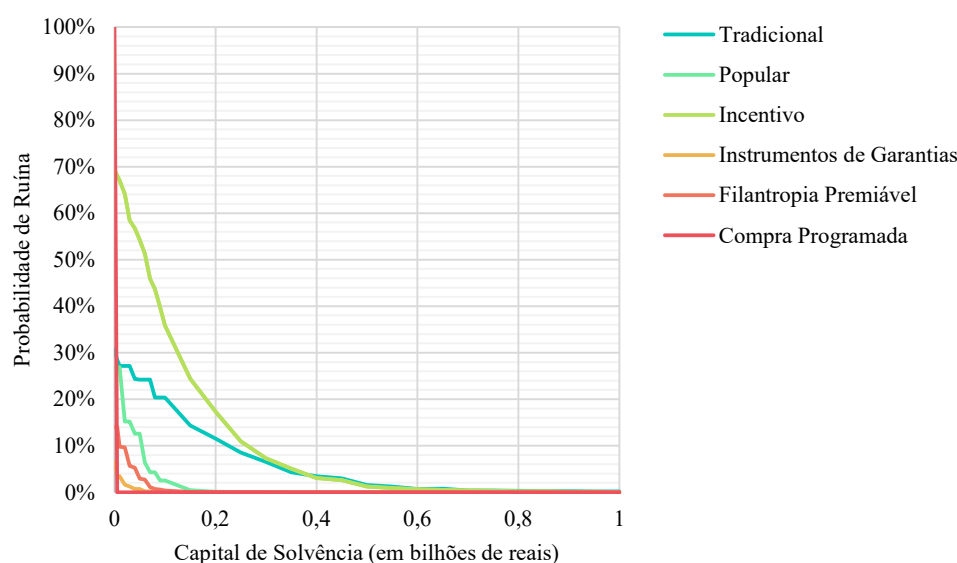
Já para as modalidades *Filantropia Premiável* e *Instrumentos de Garantias*, foram considerados o início das operações em abril de 2019 para compreender seu comportamento. No entanto,

considerando que os produtos já estavam em operação dentro de outras modalidades, os cálculos dos parâmetros das demais modalidades foram realizados considerando a base completa a partir de 2014.

4. RESULTADOS

Após aplicar os procedimentos trazidos pela Tabela 2, com as calibrações dos parâmetros definidos na Tabela 3, a Figura 10 apresenta a relação estimada do capital de solvência e a probabilidade de ruína para as sociedades de capitalização por modalidade de TC. E a Tabela 4 traz o capital mínimo requerido estimado. Na modalidade *Tradicional*, com um faturamento de quase R\$2 bilhões ao mês, a modalidade mostra-se solvente, convergindo a 0 rapidamente quando $U_0 = R\$600$ milhões, aproximadamente um terço do faturamento mensal. Assim, há indícios de que a modalidade é extremamente lucrativa, com uma ruína que se coloca como muito pequena perto do tamanho deste mercado.

Figura 10. Relação entre o capital de solvência e a probabilidade de ruína para cada modalidade de TC.



Fonte: Elaboração própria.

Tabela 4. Capital Mínimo Requerido (em milhões de R\$).

Probabilidade de Ruína	Tradicional	Popular	Incentivo	Instrumentos de Garantias	Filantropia Premiável	Compra Programada
10%	225,67	54,15	262,97	0,00	9,72	1,52
5%	333,48	66,60	351,00	2,38	41,11	1,52
1%	572,22	136,41	532,35	34,29	71,76	1,52
0,50%	684,21	148,54	655,56	53,46	92,50	1,52
0,03%	1.125,00	245,00	991,67	112,50	175,00	1,52

Fonte: Elaboração própria.

Para a modalidade *Popular*, também se observa um mercado solvente, com um enfoque em sorteios (que possui um risco intrínseco em sua operação). Neste caso, nota-se uma rápida convergência da probabilidade da ruína ao nível zero, de forma que um faturamento mensal é praticamente suficiente para lastrear a operação.

Para a modalidade *Incentivo*, nota-se um nível de probabilidade de ruína mais elevado (iniciado em 70%), com decaimento mais lento da curva. Neste caso, o faturamento mensal está associado a uma probabilidade de ruína superior a 20%. Considerando o faturamento anual, é possível concluir que se trata de uma atividade que exige um pouco mais de capital do que as modalidades anteriores, mas também viável. É preciso lembrar que a modalidade abrigava a filantropia premiável até 2018.

A modalidade *Compra Programada*, está praticamente em *run-off*, pois não são oferecidos novos produtos conforme as bases de dados. Assim, neste mercado quase inexistente, bastam R\$5 milhões para proteger toda a operação.

Dois novas modalidades (i.e., *Instrumentos de Garantia* e *Filantropia Premiável*) foram implementadas no final da segunda década do século XXI. E ambas merecem destaque. Embora sejam produtos já existentes antes de sua regulação, enquadradas anteriormente em *outras modalidades*, seus expressivos resultados são notórios, tendo faturamento somente abaixo da modalidade tradicional. Ambas as modalidades possuem curvas de probabilidade de ruína que se concentraram abaixo das demais, indicando serem solventes *per se*, uma vez que estão há pouco tempo disponíveis no mercado.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste estudo foram estimados os níveis de exposição ao risco de insolvência de sociedades de capitalização, representados pelos comportamentos das relações entre o capital de solvência e a probabilidade de ruína para cada modalidade de TC autorizadas no Brasil. Neste aspecto, o trabalho é pioneiro na literatura, buscando compreender a situação de solvência deste segmento do mercado segurador brasileiro. Afinal, este tipo de abordagem na literatura nacional é escasso, com olhares voltados a risco de sorteio (Franklin Jr. et al., 2013; Melo et al., 2012), por exemplo. Entre as contribuições deste trabalho se concentra: (i) sob o mercado de TC, que possui escassa literatura, (ii) sob a ótica gerencial, de maneira que investidores podem considerar as sociedades de capitalização como um atrativo investimento, e; (ii) para o regulador, que determina o capital mínimo requerido para operação, que atualmente possui valores arbitrários, sem justificativa disponível para a sociedade.

Inicialmente, apresentou-se o mercado de TC, seu histórico e relevância econômico-financeira e seus aspectos sociais. Em seguida, visando operacionalizar a mensuração do processo estocástico das finanças de uma sociedade de capitalização, foi proposta uma modificação do modelo clássico de Cramér-Lundberg, a fim de absorver as peculiaridades deste produto (i.e., tratando a parcela das despesas – sorteios/resgates – como fixas e as receitas como uma convolução de dimensões aleatórias). Pelos resultados, há evidências de que todas as modalidades possuem baixa necessidade relativa de recursos para a operação, com elevados lucros, e ao mesmo tempo, um baixo nível de risco.

Por simplificação, esse estudo utilizou a forma de pagamento único (PU), com prêmio médio do mercado para cada modalidade. Entre suas principais limitações estão a falta de dados em relação a quantidade de títulos comercializados por modalidade, e dados mais granulares no nível de sociedades. Além dessas, uma importante limitação necessita destaque. Como os dados foram trabalhados em bilhões de reais, para a geração da frequência (via distribuição de Poisson), foi utilizado um multiplicador para transformar os valores em milhões. No entanto, conforme se aumenta o multiplicador, a distribuição se aproxima de uma distribuição Normal, limitando a variância da distribuição, o que reflete em uma rápida convergência para a probabilidade de ruína a zero. Para pesquisas futuras, sugere-se que seja reproduzido o trabalho adotando a quota de capitalização como premissa, uma vez em que, ao se rentabilizar mais do que o comprometido com o subscritor, amplia-se a receita da sociedade de capitalização.

REFERÊNCIAS

- Abreu, J. S. T. E. C. (2012). *Títulos de Capitalização [Dissertação de Mestrado]*. Universidade Técnica de Lisboa.
- Albrecher, H., & Haas, S. (2011). Ruin theory with excess of loss reinsurance and reinstatements. *Applied Mathematics and Computation*, 217(20), 8031–8043. <https://doi.org/http://dx.doi.org/10.1016/j.amc.2011.02.109>
- Albrecher, H., & Kantor, J. (2002). Simulation of Ruin Probabilities for Risk Processes of Markovian Type. *Monte Carlo Methods and Applications*, 8(2), 111–127.
- Amador, P. (2002). *Capitalização: uma história de prosperidade* (Grupiara (ed.)).
- Areias, C. A. C., & Carvalho, J. V. F. (2021). Reinsurance in the Supplementary Health: A Counterfactual Study on the Impacts of Reinsurance Treaties Adoption by Healthcare Plans Operators in Brazil. *Brazilian Business Review*, 18(2), 217–235. <https://doi.org/10.15728/bbr.2021.18.2.6>
- Asmussen, S. (1985). Conjugate processes and the simulation of ruin problems. *Stochastic Processes and Their Applications*, 20(2), 213–229. [https://doi.org/10.1016/0304-4149\(85\)90211-X](https://doi.org/10.1016/0304-4149(85)90211-X)
- Badaoui, M., & Fernández, B. (2013). An optimal investment strategy with maximal risk aversion and its ruin probability in the presence of stochastic volatility on investments. *Insurance: Mathematics and Economics*, 53(1), 1–13. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.04.002>
- Baumgartner, B., & Gatto, R. (2010). A Bootstrap Test for the Probability of Ruin in the Compound Poisson Risk Process. *ASTIN Bulletin*, 40(1), 241–255. <https://doi.org/10.2143/AST.40.1.2049227>
- Bierth, C., Irresberger, F., & Weiß, G. N. F. (2015). Systemic risk of insurers around the globe. *Journal of Banking and Finance*, 55, 232–245. <https://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2015.02.014>
- Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., & Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics* (D. Anderson (ed.); 2nd ed.). The Society of Actuaries.
- Carvalho, B. D. R. de, & Carvalho, J. V. F. (2019). A stochastic approach for measuring the uncertainty of claims reserves. *Revista Contabilidade & Finanças*, 30(81), 409–424. <https://doi.org/10.1590/1808-057x201907860>
- Carvalho, J. V. de F., & Guimarães, A. S. (2022). *E se o sistema falhar? Uma avaliação de risco sistêmico da prática bancassurance no Brasil*.
- Carvalho, J. V. F., & Cardoso, L. (2021). Os Impactos da Rentabilização do Estoque de Capital Sobre a Probabilidade de Ruína e o Capital de Solvência para Seguradoras. *Revista Evidenciação Contábil & Finanças*, 9(3), 9–29. <https://doi.org/10.22478/ufpb.2318-1001.2021v9n3.54420>
- Charpentier, A. (2010). Reinsurance, ruin and solvency issues: some pitfalls. In *Working Papers hal-00463381* (No. 2010–06; 2010-06, Issue 1).
- Chen, Y., & Yuan, Z. (2017). A revisit to ruin probabilities in the presence of heavy-tailed insurance and financial risks. *Insurance: Mathematics and Economics*, 73, 75–81. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2017.01.005>
- Cheng, J., Gao, Y., & Wang, D. (2016). Ruin probabilities for a perturbed risk model with stochastic premiums and constant interest force. *Journal of Inequalities and Applications*, 2016(1), 214. <https://doi.org/10.1186/s13660-016-1135-8>
- Cossette, H., Marceau, E., Mtalai, I., & Veilleux, D. (2018). Dependent risk models with archimedean copulas: a computational strategy based on common mixtures and applications. *Insurance: Mathematics and Economics*, 78, 53–71. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2017.11.002>
- Cramér, H. (1930). On the Mathematical Theory of Risk. *Skandia Jubilee Volume, Stockholm*.
- Damasceno, A. T., & Carvalho, J. V. F. (2021). Assessment of the new investment limits for assets of

- Social Security Regimes for Public Servants established by Resolution CMN 3,922/2010. *Revista Brasileira de Gestao de Negocios*, 23(4), 728–743. <https://doi.org/10.7819/rbgn.v23i4.4128>
- de Vylder, F. (1977a). Martingales and ruin in a dynamical risk process. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1977(4), 217–225. <https://doi.org/10.1080/03461238.1977.10405065>
- de Vylder, F. (1977b). A new proof for a known result in risk theory. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 3(4), 277–279. [https://doi.org/10.1016/S0377-0427\(77\)80021-6](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(77)80021-6)
- Dickson, D. C. M., & Qazvini, M. (2016). Gerber–Shiu analysis of a risk model with capital injections. *European Actuarial Journal*, 6(2), 409–440. <https://doi.org/10.1007/s13385-016-0131-1>
- Dietz, S., & Walker, O. (2019). Ambiguity and Insurance: Capital Requirements and Premiums. *Journal of Risk and Insurance*, 86(1), 213–235. <https://doi.org/10.1111/jori.12208>
- Dong, Y., & Wang, D. (2018). Uniform asymptotics for ruin probabilities in a two-dimensional nonstandard renewal risk model with stochastic returns. *Journal of Inequalities and Applications*, 2018(1), 319. <https://doi.org/10.1186/s13660-018-1913-6>
- Dufresne, F., & Gerber, H. U. (1989). Three Methods to Calculate the Probability of Ruin. *ASTIN Bulletin*, 19(1), 71–90. <https://doi.org/10.2143/ast.19.1.2014916>
- England, P. D., Verrall, R. J., & Wüthrich, M. V. (2019). On the lifetime and one-year views of reserve risk, with application to IFRS 17 and Solvency II risk margins. *Insurance: Mathematics and Economics*, 85, 74–88. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2018.12.002>
- Euphasio Junior, J. W., & Carvalho, J. V. F. (2022). Reinsurance and Solvency Capital: Mitigating Insurance Companies' Ruin Probability. *Revista de Administração Contemporânea*, 26(1). <https://doi.org/10.1590/1982-7849rac2022200191.en>
- Franklin Jr., S. L., Melo, E. F. L., & Neves, C. R. (2013). Risk Assessment of Raffle-Linked Savings Account Companies: Comparison Between Two Models. *Revista Brasileira de Risco e Seguro*, 8(16), 75–84.
- Gatto, R. (2020). The stability of the probability of ruin. *Stochastic Models*, 36(1), 112–133. <https://doi.org/10.1080/15326349.2019.1695135>
- Gatto, R., & Mosimann, M. (2012). Four approaches to compute the probability of ruin in the compound Poisson risk process with diffusion. *Mathematical and Computer Modelling*, 55(3–4), 1169–1185. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.09.041>
- Gupta, M., & Prakash, P. (2018). Impact of underwriting insurance risk on bank holding company behavior. *Journal of Risk Finance*, 19(4), 343–360. <https://doi.org/10.1108/JRF-11-2017-0191>
- Hipp, C., & Plum, M. (2003). Optimal investment for investors with state dependent income, and for insurers. *Finance and Stochastics*, 7(3), 299–321. <https://doi.org/10.1007/s007800200095>
- Kaserer, C., & Klein, C. (2019). Systemic Risk in Financial Markets: How Systemically Important Are Insurers? *Journal of Risk and Insurance*, 86(3). <https://doi.org/10.1111/jori.12236>
- Kasumo, C., Kasozi, J., & Kuznetsov, D. (2018). On Minimizing the Ultimate Ruin Probability of an Insurer by Reinsurance. *Hindawi Journal of Applied Mathematics*, 2018(XI). <https://doi.org/10.1155/2018/9180780>
- Lundberg, F. O. (1903). Approximations of the Probability Function/Reinsurance of ColletiveRisks. *Almqvist and Wiksell*.
- Maia, A. C., & Carvalho, J. V. de F. (2020). A espiral de antisseleção no mercado brasileiro de planos de saúde individuais. *Estudos Econômicos (São Paulo)*, 50(3), 535–568. <https://doi.org/10.1590/0101-41615036amj>
- Melo, E. F. L., Franklin Jr., S. L., & Neves, C. R. (2012). Mensuração do Risco de Sorteio em Títulos de Capitalização. *Brazilian Review of Finance*, 10(2), 197. <https://doi.org/10.12660/rbfin.v10n2.2012.3656>
- Menoncin, F., & Vigna, E. (2017). Mean–variance target-based optimisation for defined contribution pension schemes in a stochastic framework. *Insurance: Mathematics and*

- Economics*, 76, 172–184. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2017.08.002>
- Moro, E. D., & Krvavych, Y. (2017). Probability of sufficiency of solvency ii reserve risk margins: practical approximations. *ASTIN Bulletin*, 47(3), 737–785. <https://doi.org/10.1017/asb.2017.12>
- Oliveira, A. D., Filomena, T. P., Perlin, M. S., Lejeune, M., & Macedo, G. R. (2017). A multistage stochastic programming asset-liability management model: an application to the Brazilian pension fund industry. *Optimization and Engineering*, 18(2), 349–368. <https://doi.org/10.1007/s11081-016-9316-3>
- Park, S. C., & Xie, X. (2014). Reinsurance and systemic risk: The impact of reinsurer downgrading on property-casualty insurers. *Journal of Risk and Insurance*, 81(3), 587–622. <https://doi.org/10.1111/jori.12045>
- Ramsden, L., & Papaioannou, A. D. (2019). Ruin probabilities under capital constraints. *Insurance: Mathematics and Economics*, 88, 273–282. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2018.11.002>
- Saad, N. S., & Ribeiro, C. O. (2006). Um modelo de gestão de ativo/passivo: aplicação para fundos de benefício definido com ativos de fluxo incerto. *Revista Contabilidade & Finanças*, 17(spe2), 75–87. <https://doi.org/10.1590/S1519-70772006000500006>
- Santiago, T. A., & Carvalho, J. V. de F. (2020). Análise da oferta ideal de contratos de resseguro utilizando métodos de otimização condicionada. *Anais Do XXIII SEMEAD*, 1–17.
- Santos, d. B., mendes-da-silva, w., & gonzalez, l. (2018). Deficit de alfabetização financeira induz ao uso de empréstimos em mercados informais. *Revista de Administração de Empresas*, 58(1), 44–59. <https://doi.org/10.1590/s0034-759020180105>
- Schiotti, J. (1948). A capitalização do Brasil. In *Instituto de Resseguros do Brasil - Edigraf Edições Gráficas*.
- Tamturk, M., & Utev, S. (2018). Ruin probability via Quantum Mechanics Approach. *Insurance: Mathematics and Economics*, 79, 69–74. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2017.12.009>
- Tanaka, A. D., & Carvalho, J. V. F. (2019). Estimação da estrutura de dependências entre classes de seguro por meio de cópulas. *Revista Brasileira de Risco e Seguro*, 15(25), 1–34.
- Valladão, D., & Veiga, Á. (2008). Optimum Allocation and Risk Measure in an Asset Liability Management Model for a Pension Fund Via Multistage Stochastic Programming and Bootstrap. *Engineering Optimization*, June, 1–5.
- Waring, M. B., & Siegel, L. B. (2007). Don't Kill the Golden Goose! Saving Pension Plans. *Financial Analysts Journal*, 63(1), 31–45. <https://doi.org/10.2469/faj.v63.n1.4405>
- Wüthrich, M. V. (2015). From ruin theory to solvency in non-life insurance. *Scandinavian Actuarial Journal*, 2015(6), 516–526. <https://doi.org/10.1080/03461238.2013.858401>
- Xu, L., Wang, M., & Zhang, B. (2018). Minimizing Lundberg inequality for ruin probability under correlated risk model by investment and reinsurance. *Journal of Inequalities and Applications*, 2018:244. <https://doi.org/10.1186/s13660-018-1838-0>