Matemática como uma Ciência de Padrões: Epistemologia *

Original: Mathematics as a Science of Patterns
by Michael D. Resnik

*Tradução de J. C. Marçal ***

recebido: 07/2012
aprovado: 09/2012

1. Introdução

Em outro lugar ([8]) eu insisti para que a matemática fosse vista como uma ciência de padrões, com seus objetos sendo posições nos padrões[1]. Argumentei que esta aproximação prometia resolver a aporia do platonismo matemático surgido da existência de reduções múltiplas das principais teorias matemáticas. Meu objetivo aqui é argumentar que a mesma aproximação promete resolver outro desafio do platonismo resultante da natureza causalmente inerte das entidades abstratas. O problema pode ser posto do seguinte modo: se a matemática é sobre entidades abstratas, então como é possível o conhecimento matemático? Em particular, como nós podemos ter acesso ao objeto da matemática?

Em anos recentes, este assunto tem sido associado à demanda de adequar a matemática a uma explanação causal ou naturalística geral do conhecimento e da percepção[2]. O desafio, portanto, torna-se demonstrar que uma explanação científica do conhecimento matemático é compatível com as exigências ontológicas do platonismo matemático. Se alguém modela uma explanação, digamos, de nosso conhecimento dos sapos, de acordo com o fato de que muito de nosso conhecimento deles reside em nossa percepção dos mesmos, então uma explanação científica do conhecimento matemático parece condenada desde

** Dr. em Filosofia pela UFPE. Professor da Faculdade Joaquim Nabuco. em@il: introitu@hotmail.com.*

ISSN 1516-9219. DOI: http://dx.doi.org/10.7443/problemata.v4i1.13223

o início. Falhamos não apenas ao interagir causalmente com os objetos matemáticos, mas é também impossível sujeitá-los às manipulações e observações experimentais com as quais nós testamos nossas teorias psicológicas da percepção. Deste modo, não irei usar um modelo perceptual em minha explanação. Embora alguns filósofos tenham argumentado que entidades abstratas são causalmente efetivas, tentarei permanecer descomprometido com respeito a esta posição[3].

Tomo os objetos matemáticos – números, conjuntos, funções, pontos – como entidades sem estruturas que ocorrem numa estrutura matemática, servindo como posições aí e tendo sua identidade determinada por suas relações com outras posições na estrutura a que eles pertencem[4]. Ontologicamente, vejo todos os objetos matemáticos sobre o modelo dos pontos geométricos. Eu uso este insigth em minha aproximação ao conhecimento matemático. Por isso, afirmo que nós não temos conhecimento dos objetos matemáticos dados isoladamente, mas antes conhecemos estruturas – ou talvez partes das estruturas. O problema epistemológico se torna, então, explicar como nós adquirimos este tipo de conhecimento. Para iniciar, acredito ser mais sugestivo falar de padrões do que em estruturas. Uma razão para fazer isto é lembrar-nos de que o estudo científico do reconhecimento do padrão e a cognição do mesmo podem ser úteis para aprendermos sobre conhecimento matemático. Outra razão é que nós tratamos com padrões abstratos na teoria musical e lingüística e há razão para crer que as nossas então chamadas intuições musicais ou lingüísticas são epistemologicamente similares ao nosso conhecimento dos princípios matemáticos elementares. Por exemplo, nossa crença de que a equivalência das sentenças positivas e negativas pode ser análoga à nossa crença na comutividade da adição ou em nossa crença de que há ou que não deveria haver limite na extensão das composições musicais - podendo ser análoga à nossa crença de que as séries de número são sem fim. Para mim, muito pouco é conhecido sobre como nós adquirimos tal conhecimento das estruturas musicais e lingüísticas; então a atual psicologia da linguagem e da música não nos ajudará com a epistemologia da matemática. Contudo, intuições musicais e lingüísticas possuem a reputação de status cientifico. Ao apontá-las, espero que algo possa ser ganho para a então chamada intuição matemática.

Mais do que delinear teorias subsistentes da cognição do padrão, irei esboçar uma explanação puramente especulativa da gênesis de nossas crenças sobre os padrões[5]. Então explorarei a questão de saber se tais crenças poderiam contar como conhecimento. Finalmente tornarei à história da matemática para mostrar que minha explanação da gênesis de nosso conhecimento das estruturas matemáticas possui algum suporte histórico.

2.Adquirindo crenças sobre padrões

Agora volto a especular sobre como podemos adquirir crenças sobre padrões e contornar, por enquanto, a questão se tal processo gera conhecimento. Intencionalmente evito conectar este processo aos indivíduos em oposição à cultura ou aqueles que primeiro aprendem sobre padrões em relação aqueles que já são especialistas em um padrão ou outro. Suspeito que minha explanação – com modificações apropriadas – aplicar-se-á a cada uma dessas situações. Além disso, está claro que a questão de como nós - enquanto espécie - adquirimos conhecimento matemático está relacionada à questão de como nossas crianças adquirem tal conhecimento e ambos, por sua vez, estão relacionados à questão de como os matemáticos adquirem mais deste conhecimento.

Descreverei o processo de adquirir crenças sobre padrões como uma série de estágios em que as crenças de uma pessoa em resposta a certa experiência obtém progressivamente mais estrutura lógica e finalmente envolve-o num compromisso com as entidades abstratas. Este processo é arranjado da mesma forma lógica e conceitual. Ainda surgem como suporte para suas realidades empíricas como nos estudos do desenvolvimento de Piaget (que não revisarei aqui)[6] e na história da matemática.

Para começar, todo o nosso conhecimento de padrões inicia-se com experiências que chamarei de experienciando algo como padronizado. Por exemplo, como um principiante no mergulho com o snorkel, nos seus primeiros minutos de observação embaixo d'água, pode revelar nada mais do que uma paisagem submarina amorfa. Mais tarde você verá coisas como modeladas. Similarmente, as primeiras horas de alguém ouvindo um idioma estrangeiro, como de costume, revelam padrões não definidos para as elocuções que alguém ouve. Contudo, exposição repetida normalmente conduz alguém a perceber as elocuções como padronizadas, mas do que ao acaso. O próximo estágio é reconhecer relações estruturais equivalentes entre as informações agora experienciadas como padronizadas. O mergulhador de snorkel reconhece um peixe como tendo a mesma forma e cor de outro. O estrangeiro começa a ouvir elocuções como soando da mesma forma. Outras relações poderiam ser observadas neste estágio também: por exemplo, o mergulhador poderá reconhecer que tipo de peixe é freqüentemente encontrado num determinado coral. Isto é sobre o modo como um mergulhador consegue reconhecer - e eu falhei em conseguir o mesmo lingüisticamente durante a semana que passei na Hungria alguns anos atrás. Mas no nível cultural, nós, enquanto um grupo, invariavelmente seguimos em frente, sendo conduzidos pela necessidade ou curiosidade. Introduzimos predicados para a equivalência e outras relações que nós reconhecemos como apreendidas. Não mais chamaremos dois peixes como do mesmo tipo, mas sim como dois peixes trumpete. Isto é para classificar entidades concretas e atribuir propriedades estruturais e relações para elas. Mas isto não é para admitir padrões abstratos em si mesmos desde que permanece ao nível dos predicados não descrever nomes ou quantidades sobre os padrões ou suas posições. No caso geométrico é para descrever coisas concretas como circular, quadrada ou triangular, mas não para admitir círculos, quadrados ou triângulos.

Eu considero o uso de quantificadores numéricos – tais como "houve 30 reis" ou em "ele saiu por três dias" – assim como o uso adjetivado de números funcionando também ao nível do predicado, porque estes não se comprometem com os números. Provavelmente parece que neste estágio muitas leis que mais tarde serão expressas em termos abstratos já são reconhecidas. Por exemplo, a verdade geométrica de que retângulos que têm diagonais de comprimentos iguais podem assumir a forma de "num objeto retangular as medidas diagonais serão iguais" e a verdade numérica de que três é menos do que cinco pode ter a forma de "se há três de algo e cinco de algo mais, então há menos do que o primeiro".

Interessantemente nós já temos um sério problema epistemológico neste estágio, embora entidades abstratas não tenham sido introduzidas. Nós já temos uma idéia razoável de como nós podemos vir a conhecer que três coisas são menores do que cinco através da contagem repetida e de comparações. Este seria como outros tipos de conhecimento empírico. (Apesar do trabalho de David Bostock sobre quantificadores numéricos ([1]), não estou preparado para creditar este conhecimento à lógica desde que sua análise de menos do que envolve quantificadores de ordem mais alta). Não há razão para acreditar, contudo, que nosso conhecimento de que um milhão e três coisas é menor do que um milhão e cinco coisas possui o mesmo tipo de evidência ou gênesis. Este conhecimento derivaria, eu conjeturo, de uma teoria rudimentar de contar e princípios concernentes à geração e uso dos numerais. Portanto envolveria ver padrões em nossas operações de contar tanto quanto ver padrões nas coisas operadas. Desde que este não necessite vincular-se ao reconhecimento dos numerais como entidades abstratas – como posições nas séries dos numerais – ou naquelas séries como um padrão abstrato; mesmo este não precisa se comprometer ao padrão e suas posições como entidades em si mesmas.

Entidades abstratas não estão muito longes, contudo. O próximo movimento é complementar predicados com nomes por formas, tipos e outros padrões. Em vez de falar de coisas quadradas, circulares ou triangulares, agora se trata de quadrados, círculos ou triângulos. Não se trata de uma conversa inútil, pois haverá quantificação sobre estes padrões ou ao menos sobre suas posições[7]. (Na matemática este movimento foi associado com a transição das relações de equivalência às classes de equivalência - e formas, números e outras entidades abstratas foram reduzidos às classes de equivalência. Não acredito que ilumina este contexto tomar esta compreensão moderna. Opto mais pelas reduções matemáticas).

Em vez de nomear estruturas, este estágio envolve esforços para descrevê-las em termos posicionais ou relacionais, mais do que pelo significado de suas estâncias. Deste modo, os círculos geométricos são definidos como lugares de pontos e sentenças gramaticais são caracterizadas em termos de ordem da palavra. A razão desta aproximação é que alguém se torne interessado nas formas em si mesmas – até mesmo para o alcance das estruturas admitidas que podem não ser atualizadas. O infinito potencial aparece neste ponto na forma de figuras de alguns números de lados, canções ou sentenças de alguma extensão ou prédios com alguns números de andares. No caso da música, linguística e arquitetura estas são, com certeza, meramente "possibilidades teoréticas". Mas a conceitualização em termos de entidades abstratas em si mesmas está com força total neste nível.

Outro fenômeno que geralmente acompanha nosso pensamento sobre entidades abstratas é a retenção do visual, auditivo ou outras imagens sensoriais das coisas concretas que conduzem a nossas concepções abstratas. Nós pensamos em triângulos abstratos ao olhar coisas triangulares e nós usamos diagramas ao teorizar sobre eles. Aparentemente os gregos da Antiguidade usavam séries de pontos para representar os números e chegar às verdades sobre eles. Hoje em dia, não é comum usar uma disposição linear de pontos para representar a hierarquia iterada dos conjuntos, e os teoristas de classe são completamente dependentes de seus diagramas de setas. O fato é que imagens que podem simbolizar em nossos pensamentos estruturas abstratas não implicam, é claro, que nós percebemos estas estruturas com algum tipo de olho mental, mas eu suspeito que ele reside na crença razoavelmente difundida entre os matemáticos de que nós temos intuições das estruturas matemáticas. De fato, estou convencido de que o sucesso em certas áreas da matemática depende de se ter um rico e vívido arranjo de imagens para guiar as conjecturas de alguém. Logo, não tenho objeção em falar da intuição contanto que não seja literalmente construída.

Minha proposta até agora pode ser sumarizada como se segue: nós seguimos através de uma série de estágios durante o qual nós conceitualizamos nossas experiências em termos sucessivamente mais abstratos. No último estágio, podemos deixar a experiência para trás de nossas teorias que são melhores construídas como teorias das entidades abstratas. Na base desta transição estão nossas tendências de perceber as coisas como estruturadas, nosso impulso para teorizar e nossa vontade criativa. Quão rápido nós viajamos da experiência às teorias abstratas depende muito da cultura em que nós vivemos. Levou eras para nossa espécie chegar à geometria e à teoria dos números. Hoje, matemáticos treinados podem fornecer-nos descrições abstratas de estruturas simples empiricamente dadas em poucos dias.

Tenho sido perguntado em ocasiões prévias se nós podemos "possuir" um padrão abstrato antes que nós possamos perceber algo instantaneamente ou se nós primeiro "tomamos" o padrão através de suas estâncias; em resumo, se eu sigo Platão ou Aristóteles. A resposta é "ambos e nenhum". Enquanto meus pontos de vista são similares aos deles, eles também divergem em importantes direções. Primeiro, eu não postulo uma faculdade mental usada para adquirir conhecimento dos padrões; eles não são vistos através do olho da mente. Segundo, eu não reivindico que o processo abstrativo fornece verdades necessárias ou um conhecimento a priori. Nestes dois pontos eu não sigo nem a Platão e nem a Aristóteles. Por outro lado, acredito que há limitações inerentes em nossa habilidade de reconhecer e conhecer padrões puramente através da abstração das estâncias. Por exemplo, não podemos abstrair uma canção que contém notas de uma alta freqüência de um apito de cachorro. Embora não possamos fazer isto porque não ouvimos as notas em questão, há outros padrões cujas estâncias nós podemos sentir em sua integridade, mas que são tão complicadas que nós não podemos abstraí-las diretamente. Os padrões exibidos por uma pintura de um Jackson Pollock são provavelmente exemplos disto. O construtivismo em matemática pode ser visto como uma tentativa de limitar a matemática àqueles padrões que podem ser abstraídos da experiência via métodos razoavelmente diretos. Contudo, não vejo um modo de colocar limitações a priori nos padrões que a matemática pode estudar sem incorrer em muitas das dificuldades que atormentam o construtivismo. Além do mais, há ampla evidência de que os matemáticos combinam, variam e estendem padrões que chegam via abstração para obterem alguns que não podem ser alcançados através desta rota. As estruturas matemáticas obtidas através do método do esforço são exemplos contemporâneos. Ao enfatizar o processo abstrativo como o principal significado da obtenção de conhecimento dos padrões, eu sigo Aristóteles, mas ao reconhecer padrões que não podem ser imediatamente dados (neste mundo) e ao reconhecer limitações inerentes em nossas habilidades abstrativas, eu sigo Platão.

Uma questão correlata diz respeito a congenitividade de nossas idéias dos padrões. Desde que isto ameaça nos conduzir à disputa entre Chomsky e outros no que se refere à aquisição da linguagem, hesito em me referir a isto de qualquer forma. Pode clarificar meu ponto de vista, contudo, se digo mais: que o principal argumento em favor da crença de Chomsky de que fatores inatos estão extensivamente presentes no trabalho de aquisição da linguagem é que as crianças adquirem linguagem na base da exposição a uma relativamente pequena parte do corpo de sua linguagem e o fazem com pouco ensino. O mesmo não pode ser dito em relação à matemática. Não apenas houve milênios de desenvolvimento da linguagem para o desenvolvimento da matemática, mas enquanto espécie a maioria de nós permanece totalmente ignorante da matemática de verdade. A relação entre conhecimento matemático (e o conhecimento geral de padrões) e os estágios que conduzem a ele são mais como a relação entre a aquisição de linguagem e a teoria lingüística. Uma condição necessária para o desenvolvimento tardio é o desenvolvimento anterior, mas apenas o desenvolvimento prévio é provavelmente governado por mecanismos inatos.

Em minha explanação fiz pouco mais do que conjeturar sobre os estágios que conduzem ao conhecimento de padrões. Os mecanismos responsáveis pela transição de um estágio a outro permanecem misteriosos e os psicólogos mal têm olhado para a transição final para entidades abstratas. Impulsos criativos e a curiosidade estão provavelmente trabalhando neles porque nós introduzimos novos padrões. Também penso que um papel importante é jogado pelas transições lingüísticas inconscientes dos predicados aos termos abstratos singulares. Os resultados proveitosos disto são então aceitos como novas crenças[8].

3.Nossas crenças em padrões constituem conhecimento

Deixe-nos supor que minha história natural de nossas crenças sobre padrões é precisa. Que razões há para acreditar que essas crenças são sobre algo? Ou que elas são verdadeiras? Ou que contam como conhecimento? Eu a tomo para permitir que haja verdades matemáticas – que são sobre entidades abstratas e que algumas delas são conhecidas para que sejam verdadeiras. Eu me referi, no meu artigo anterior, a argumentos que afirmam que nós temos um conjunto enorme de conhecimento de padrões[9]. Garantindo isto tudo, eu tinha apenas estabelecido que algumas de nossas crenças sobre padrões, adquiridos através do processo que eu descrevi, acontecem para constituir conhecimento. Há alguma razão para acreditar que o processo geralmente é uma rota para o conhecimento? Infelizmente, eu posso oferecer apenas aproximações provisórias em direção a uma resposta.

Primeiro, eu quero distinguir a teoria pura de um padrão de uma versão aplicada do mesmo. Não quero dizer com isto que recorro às visões da distinção dos positivistas entre puro, isto é, geometria não interpretada e aplicada, isto é, física, embora o que eu direi pareça similar. Deixe-nos imaginar que ao usar o processo abstrativo que eu esbocei, um gramático chega a uma estrutura complexa que ele chama Inglês. Agora suponha que mais tarde resulta que o corpo do Inglês fracassa de modo significativo em mediatizar este padrão, logo muitas das afirmações que nossos lingüistas fizeram sobre sua estrutura serão falseadas. Por derivação, os lingüistas renomeiam a estrutura para Inglês T. Todavia, nosso conhecimento lingüístico sobre o Inglês T permanece como padrão; já que o mesmo arranjou a descrição de algum padrão e descobriu algumas de suas propriedades. Similarmente, afirmo que nós conhecemos muito sobre o espaço euclidiano apesar de sua falha em ser fisicamente percebido. Uma teoria pura de um padrão é desenvolvida dedutivamente ou desenvolve-se a teoria que é baseada sobre axiomas que pretendem caracterizar o padrão em questão. Suas assertivas não se estendem às afirmações concernentes a se, onde ou como o padrão é percebido; estas são verdadeiras para aquele padrão independente de sua aplicabilidade à experiência (se há alguma) da qual ele foi abstraído. Uma teoria aplicada de um padrão consistirá de uma teoria pura ao lado de afirmações que declaram como o padrão é percebido, etc. Uma teoria aplicada pode ser falseada ao mostrar que a informação que ela cobre não combina com seus padrões. Uma teoria pura pode ser falseada ao mostrar que ela falha em caracterizar qualquer padrão, isto é, que ela é inconsistente e pode ser demonstrada sua inadequação ao mostrar que ela não caracteriza um padrão único, isto é, que ela não é categórica.

Deixe-nos voltar nossa atenção às teorias puras a partir da abordagem das teorias aplicadas que deveriam seguir linhas padronizadas. De acordo com minha sugestão, uma teoria pura de um padrão é justificada de acordo com o grau em que nós possuímos evidência de sua consistência e categoricidade, sendo a primeira possuidora de uma prioridade maior. Os matemáticos contemporâneos acumularam bastantes evidências que sustentam tais assuntos que são dedutivas e hipotéticas. Nós teremos provas de que uma teoria de um padrão é consistente ou categórica, outras, portanto, serão ou não. Além disso, os métodos incorporados em tais provas foram usados para produzir conhecimento de novas estruturas matemáticas. É claro que tudo depende de nosso conhecimento incondicional de algumas estruturas iniciais; e com respeito a tais estruturas nossa evidência deve ser não-dedutiva e indireta. Aqui eu acredito que a gênesis de nossas crenças desempenha um papel crucial. Por isso eu conjeturo que ao menos nossas primeiras evidências em favor de uma teoria pura de um "padrão inicial" são providas pelo grau de coerência entre a teoria e nossas crenças concernentes à experiência da qual ele foi abstraído. Nossas justificativas para tais teorias são de forças variadas e elas mudam com o progresso da ciência. Uma teoria pretendendo descrever um padrão simples é mais provável que esteja correta do que outra que pretende descrever um padrão complexo. Uma teoria que se adequou mais proximamente da experiência está mais provavelmente correta do que aquela que envolve muitas extrapolações. Entretanto, a aritmética está mais provavelmente correta do que a teoria dos conjuntos. Não apenas pretende lhe dar com padrões mais simples, mas seus axiomas são mais facilmente relacionados à experiência. Pra se ter certeza, ambos envolvem extrapolação da experiência assim que eles se relacionam com estruturas infinitas, porém o salto para o infinito surge muito mais cedo na teoria dos conjuntos e desempenha um papel muito mais crucial.

Outras considerações mais matemáticas também defendem muitas de nossas teorias que se relacionam com padrões inicialmente abstraídos da experiência. As várias reduções da aritmética, geometria, análise e teoria do conjunto mostram – ao menos em minha abordagem da redução – que os padrões tratados por estas teorias ocorrem dentro daquelas tratadas por outras teorias. Deste modo, o mesmo padrão pode ser alcançado por diversas rotas, dando respaldo à nossa crença de que havia ali um padrão em primeiro lugar. Isto é similar ao tipo de respaldo que muitas definições equivalentes da tese de recursão de Church-Turing. Os matemáticos sustentam uma teoria pura também. Que nós possuamos muitas provas consistentes para a teoria dos números e tenhamos uma compreensão precisa da força de suas tomadas envolvidas em tais provas deve ter certamente aumentado nossa confiança na consistência da teoria dos números.

Nem o processo abstrativo nem o acúmulo de resultados matemáticos adicionais dão um padrão putativo que garanta nossa crença sobre os mesmos. Tentativas iniciais de formular uma teoria matemática tem freqüentemente falhado. As contradições teóricas dos conjuntos são apenas o exemplo mais conhecido. O máximo que alguém poderia exigir para o processo abstrativo – que eu descrevi – é que ele é mais para produzir resultados que são aproximadamente corretos do que qualquer outro método que a ciência usa para gerar crenças. A evidência desta exigência está no fato de que nenhuma teoria não-matemática de nota tenha ido muito longe. Isto, por outro lado, sugere que enquanto o processo abstrativo nem sempre pode atingir uma clareza completa e acurada sobre um padrão, geralmente conduz à consideração correta. O fato é que estamos lidando com teorias puras e estas, deste modo, são livres para bater com nossas descrições de um padrão até que a adesão delas possa explicar porque é assim.

Eu não estou certo sobre o que se infere destas considerações, desde que eu não estou preparado para comprometer-me com as atuais visões adversas à minha sobre conhecimento e justificação. Posso ver o início de uma consideração confiável em minhas últimas observações, mas vejo o início de outras considerações também. Dado o espaço atribuído a este artigo e ao prazo para sua submissão, devo deixar a questão como esta está em sua forma atual.

4.O desenvolvimento do conhecimento matemático

Acredito que é iluminador olhar o início da história da matemática tendo minha consideração do processo abstrativo em mente. Infelizmente, não há registros históricos do princípio da matemática. Os primeiros documentos do Antigo Egito, Babilônia, Índia e China já mostram seu povo possuindo, ao menos, uma noção completa dos números naturais e a habilidade de resolver problemas simples de aritmética e de palavras. Entretanto, olhando para as pessoas primitivas estudadas pelos antropólogos, o início de meus estágios – que podemos documentar – é que as relações de equivalência estão presentes, mas não a de predicação. É assim como eu interpreto a prática de contagem das tribos primitivas. Apesar deles não possuírem notações numéricas gerais, eles mantém registros das trocas dando nós em cordas, entalhando gravetos, ensacando seixos e coisas similares. (Desde que as tribos primitivas não possuem linguagem escrita alguém poderia ter falado de numerais enquanto estão usando cordas, gravetos, etc., para registro. Eu não tenho este tipo de exemplo em mente). Isto me parece ser uma evidência errada de que estas tribos primitivas operam com uma forma de conceito de equi-numerosidade.

O próximo estágio no processo abstrativo envolve o uso de predicados para as relações de equivalência e, talvez, quantificadores especiais que ficam aquém da quantificação sobre as entidades abstratas. As crianças das escolas elementares de nossa cultura provavelmente operam neste estágio. Apesar de elas usarem numerais livremente, elas não usam a teoria dos números – elas não estão indissociavelmente comprometidas com os números. Há uma grande controvérsia entre os historiadores da matemática se os precursores dos Gregos – os Babilônios e os Egípcios – falharam neste estágio também. Eles tinham algoritmos para resolver problemas, mas aqueles podiam ser interpretados como regras de manipulação de símbolos; e não está claro que eles formularam leis com generalidade e abstração suficientes para envolver-se com as entidades abstratas. Por outro lado, desenvolveram notações numéricas que poderiam designar números de qualquer tamanho. Isto sugere, ao menos, o reconhecimento implícito das séries de números. Contudo, como eu havia notado anteriormente, introduzir uma seqüência de numerais é provavelmente um passo essencial em direção à abstração das séries numéricas; mas tanto quanto falar de numerais é ainda manter-se no estágio do predicado, o envolvimento com as entidades abstratas pode ser adiado. Deste modo, a evidência pode ser lida em qualquer sentido.

Com os Gregos, o reconhecimento das estruturas matemáticas enquanto entidades abstratas está para além de qualquer dúvida. Isto é evidente tanto na linguagem de suas teorias quanto em seus comentários filosóficos. Encontro confirmação para meus pontos de vista na fascinação geral Grega com o estudo da forma – seja ela arquitetônica, musical ou geométrica. É igualmente interessante que eles tenham conduzido o processo abstrativo um passo além e representado certos padrões geométricos, musicais e arquitetônicos aritmeticamente por meio de relações.

Tenho sugerido que as teorias puras dos padrões aparecem dedutivamente. Gostaria também de pensar que um movimento de padrões simples para padrões mais complicados contarão com evidência dedutiva. Mostrar-se-á que experiências com estâncias de padrões complexos provam-se não ser confiáveis, e podem simplesmente ser indisponíveis. Há evidência, também, de que os matemáticos Gregos fizeram uma transição gradual de argumentos diagramáticos e visuais para a pura dedução enquanto eles introduziam estruturas mais complicadas[10] [11].

Referências

Bostock, D. *Logic and Arithmetic*, Vol. I, II (Oxford: Clarendon Press, 1974, 1979).

Goodman, Nicholas. "Mathematics as an Objective Science", *The American mathematical Monthly* (1974): 540-51.

Grandy, R. "In Defense of a Modest Platonism", *Philosophical Studies*, 32

(1977): 359-69.
Hart, W. D. Review of M. Steiner´s Mathematical Knowledge, *The Journal of Philosophy*, 74 (1977): 118-29.
Maddy, P. "Perception and Mathematical Intuition", *The Philosophical Review*, 89 (1980): 163-96.
Piaget, J. *The Child´s Conception of Number*, (London: Routledge and Kergan Paul, 1952).
Quine, W. V. *The Roots of Reference* (La Salle: Open Court, 1973).
Resnik, M.. "Mathematics as a Science of Patterns: Ontology", *Nous* 15 (1981).
Shelton, L. "The Abstract and the Concrete: How Much Difference Does This Distinction Mark?" Artigo não publicado e entregue em dezembro, 1980 *encontros APA*.
Struick, D. *A Concise History of Mathematics*, Vol. I (New York: Dover, 1948).
Szabo, A. *The Beginnings of Greek Mathematics* (Dordrecht: D. Reidel, 1978).

Notas

1 Apresento uma consideração dos padrões e suas posições em [8]. Nesta visão, eles são entidades abstratas.
2 Há uma boa discussão sobre isso em W. D. Hart em [4].
3 P. Maddy desenvolve uma consideração sobre o conhecimento matemático a partir de quando nós percebemos conjuntos.
4 Elaborei isto em [8].
5 Meu conhecimento da literatura psicológica é limitado, mas minha impressão é de que ela se limita a indicar como nós adquirimos o conhecimento da matemática "real".
6 Ver [6]. Eu não discuto o trabalho de Piaget (embora ele também tenha argumentado que nosso conhecimento dos números se desenvolve em estágios), porque sua consideração pára próximo à teoria dos números.
7 As teorias matemáticas mostram padrões pela quantificação sobre suas posições e não quantificam sobre os padrões em si mesmos.
8 Quine desenvolve esta idéia em [7]. Eu o sigo a ponto de asseverar que nós acreditamos em entidades abstratas ao aceitar sentenças que nos obrigam a elas. Esta visão é também desenvolvida por Grandy e Quine ao proporem uma consideração genética diferente e ao enfatizar o papel desempenhado pelas imagens sensoriais.
9 Em [8] eu cito considerações favoráveis a uma aproximação platônica para a matemática e dou a referência dos artigos pertinentes. Dois artigos adicionais com novas considerações são os de Goodmann [2] e Shelton [9].
10 Há diversas considerações sobre o início da história da matemática, mas acho a abordagem de Stuick [10] útil ao pensar sobre os tópicos

discutidos aqui. Acredito que Szabo [11] seja uma abordagem excelente sobre o desenvolvimento da matemática entre os Gregos.

11 Quero agradecer a William Boos, Philip Kitcher e Richard Numsan por seus imediatos e úteis comentários sobre a versão inicial deste artigo.