

OS IMPACTOS DA RENTABILIZAÇÃO DO ESTOQUE DE CAPITAL SOBRE A PROBABILIDADE DE RUÍNA E O CAPITAL DE SOLVÊNCIA PARA SEGURADORAS¹

THE IMPACTS OF RESERVES MONETIZATION ON THE RUIN PROBABILITY AND SOLVENCY CAPITAL FOR INSURERS

João Vinícius de França Carvalho

Doutor em Estatística (USP)
Universidade de São Paulo (USP)
jvfcarvalho@usp.br

Leonardo Cardoso

Graduando em Ciências Atuariais (USP)
leocardoso@usp.br

RESUMO

Objetivo: Avaliar a solvência técnica de seguradoras por meio da verificação do efeito de rentabilização do estoque de capital sobre a probabilidade de ruína de tais entidades e seu Capital de Solvência, principal instrumento regulatório e prudencial do setor.

Fundamento: Baseado na Teoria da Ruína e na Teoria do Risco Coletivo utilizou-se o modelo de risco clássico de Cramér-Lundberg, cuja dinâmica operacional é regida por um Processo de Poisson Composto, considerando uma carteira hipotética com distribuição Exponencial para a severidade de sinistros.

Método: Empregando dados simulados, propôs-se uma modificação no modelo de Cramér-Lundberg, incorporando uma estrutura de rentabilização dos ativos garantidores. Para simular os processos de risco, utilizou-se a abordagem via Método de Monte Carlo.

Resultados: Capitais de Solvência elevados reduzem drasticamente a probabilidade de ruína no curto prazo, e rentabilidades oriundas de aplicações financeiras são mais efetivas para evitar falências em médio e longo prazo. Assim, recomenda-se uma gestão de capital baseada no equilíbrio do binômio: (i) alocação de ativos garantidores em títulos que proporcionem rentabilidades sustentáveis, e; (ii) dimensionar o capital de solvência ideal para lidar com sinistros extremos nos primeiros anos de operação.

Contribuições: Em um contexto de queda das taxas reais de juros, este trabalho contribui: (i) sob a ótica gerencial, de maneira que os gestores possam antecipar efeitos adversos da menor rentabilização dos ativos garantidores em suas companhias, adequando sua política de investimentos, e; (ii) para o regulador, que deve estar atento a efeitos sistêmicos que ruínas podem provocar no setor.

¹ Artigo recebido em: 08/08/2020. Revisado por pares em: 28/10/2020. Reformulado em: 15/02/2021. Recomendado para publicação: 12/04/2021 por Anna Paola Fernandes Freire (Editora Adjunta). Publicado em: 30/12/2021. Organização responsável pelo periódico: UFPB

Palavras-chave: Capital de Solvência. Probabilidade de ruína. Tempo esperado até a ruína. Ativos garantidores das provisões técnicas. Teoria da Ruína.

ABSTRACT

Objective: Assess the technical solvency of insurance companies by verifying assets' returns effects on the ruin probability and their Solvency Capital related, that is the main regulatory and prudential instrument in the sector.

Background: Based on the Ruin Theory and the Collective Risk Theory, the classic Cramér-Lundberg risk model was used, whose operational dynamics is governed by a Compound Poisson Process, considering a hypothetical portfolio with Exponential distribution for the severity of claims.

Method: With simulated data, a modification in the Cramér-Lundberg model was proposed, by incorporating a structure of return on guarantee assets. To simulate the risk processes, the Monte Carlo Method approach was used.

Results: High Solvency Capitals have dramatically reduced short-term ruin probability, and the returns of financial investments, on the other hand, is more effective to avoid medium and long-term ruins. Thus, it is recommended that capital management be based on the equilibrium of: (i) guarantee assets allocation in bonds that provide sustainable returns, and; (ii) quantification of the ideal solvency capital to deal with extreme claims in the first years of operation.

Contributions: In a moment when real interest rates are dropping, this work contributes: (i) from a managerial perspective, so that managers can anticipate the lower return adverse effects on the guarantee assets in their companies, adapting their investment policy, and; (ii) for the regulator, who must be aware of the systemic effects that ruins can cause in the sector.

Keywords: Solvency Capital. Ruin probability. Expected time until ruin. Guarantee assets. Ruin Theory.

1 INTRODUÇÃO

O mercado segurador brasileiro ocupou em 2018 a 16ª posição no ranking mundial do volume total de prêmios emitidos, com participação de 3,8% no PIB nacional (aproximadamente R\$272,6 bilhões em faturamento) durante o ano de 2019 segundo o "Relatório de Análise e Acompanhamento dos Mercados Supervisionados"¹, da Superintendência de Seguros Privados (SUSEP). Outro aspecto relevante, refere-se ao volume financeiro de provisões técnicas apuradas para o setor durante o mesmo período, no total de R\$1,1 trilhão. Provisões técnicas são fundamentais porque são o componente principal do passivo contábil das companhias seguradoras, e caracterizam-se por serem estimativas calculadas atuarialmente do montante de indenizações que uma seguradora terá de pagar aos seus clientes nos casos de sinistros incorridos.

Apesar de as provisões técnicas refletirem as obrigações esperadas assumidas por tais entidades, frequentemente as receitas de prêmios não são suficientes para honrar todas as indenizações potenciais. Por isso, há a necessidade de constituição de reservas de capital, cujo objetivo é custear as despesas além do esperado. Diante desse cenário, cresce a demanda por técnicas contábeis e atuariais que propiciem aos agentes econômicos informações relevantes no processo de tomada de decisões quanto à previsibilidade dos resultados financeiros futuros das seguradoras (Areias & Carvalho, 2021). Especificamente, metodologias que evidenciem a capacidade operacional dessas empresas no longo prazo (Dong & Wang, 2018), uma vez que entidades securitárias são, por natureza, investidores institucionais de grande porte, detentores de volumes expressivos de ativos transacionados no mercado financeiro. Para além da importância financeira, ressalta-se o impacto social gerado por uma eventual insolvência de uma ou mais companhias, haja vista que a

falência de seguradoras implicará necessariamente no não pagamento das indenizações dos sinistros ocorridos.

Por consequência, há diversas maneiras de proteger a continuidade operacional destas firmas. O primeiro conjunto é de ordem gerencial. É possível ser mais criterioso no processo de subscrição de riscos, caso seja observada piora na experiência pregressa. Todavia, isso só pode ocorrer após o fechamento de um ciclo operacional, o que pode demorar muito (Xu et al., 2018). Assim, *ex-ante*, podem ser adotadas duas estratégias distintas e não-excludentes: (i) contratar resseguro ou (ii) constituir Capital de Solvência (CS) para suplementar as provisões técnicas. O CS, em particular, está na agenda regulatória internacional desde 2009, quando foi instituído o acordo *Solvência II*ⁱⁱ para a União Europeia e adotado internacionalmente como uma referência de boas práticas. No Brasil, em alinhamento ao protocolo europeu, a SUSEP dispõe sobre o tema pela Resolução CNSP n° 321/2015ⁱⁱⁱ, atestando a imprescindibilidade da constituição do Capital Mínimo Requerido (CMR), que é o maior valor entre um Capital Base (CB) e o Capital de Risco (CR). O CR é dado por uma relação matemática entre os Capitais Adicionais Baseados em Risco (CABR ou Capital de Solvência, CS) de *subscrição, crédito, operacional e mercado*.

As duas possibilidades mencionadas referem-se a gerenciamento de passivos ou de patrimônio líquido. Mas, por óbvio, há a necessidade de lastros financeiros na forma de ativos garantidores, que devem ser aplicados em bens e direitos registrados na SUSEP. O ato normativo que disciplina como as Sociedades Seguradoras, Entidades Abertas de Previdência Complementar (EAPC) e de Capitalização podem aplicar seus recursos das provisões técnicas é a Resolução CMN n° 4444/2015^{iv}. Em seu Capítulo III, a norma é explícita ao definir o conjunto de ativos em que os recursos podem ser aplicados: "I-Renda Fixa (RF); II-Renda Variável (RV); III-Imóveis; IV-Investimentos sujeitos à variação cambial; V-outros". Particularmente nos dois primeiros, foco do presente trabalho, a mesma norma estabelece que, para seguros gerais e de pessoas, se pode alocar pelo menos 51% dos recursos em títulos de renda fixa e até 49% em títulos de renda variável, até 8% em Imóveis e até 11% em Fundos Imobiliários.

O objetivo principal deste trabalho é estimar a probabilidade de uma companhia seguradora entrar em ruína, via experimentos de simulação por Método de Monte Carlo (MMC), com parâmetros controlados, incorporando uma estrutura de rentabilização do estoque de capital, emulando os investimentos que a firma teria em ativos de mercado (sejam de RF ou RV) garantidores de suas provisões técnicas. Portanto, este trabalho contribui para o avanço da literatura ao incorporar os efeitos do risco de mercado e sua relação com os riscos de subscrição.

Em seguida, como decorrência da primeira mensuração, objetiva-se também estimar o CS, bem como avaliar o comportamento da variável aleatória tempo esperado até a ocorrência da ruína. O texto está separado em cinco seções incluindo esta introdução. A próxima traz uma breve revisão do marco regulatório, seguida da revisão da literatura científica dos trabalhos sobre probabilidade de ruína, tanto do ponto de vista teórico como empírico. Na seção 3, são apresentados os procedimentos metodológicos utilizados, e, na seção 4, os principais resultados. Encerrando, são apresentadas as considerações finais.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 Marcos Regulatórios

O *Solvência II* (Diretriz 138/2009) é o arcabouço regulatório vigente na União Europeia, estabelecendo as regras gerais para o funcionamento dos mercados segurador e ressegurador europeus. Esse projeto nasce no início dos anos 2000 após a necessidade de resposta frente aos grandes escândalos institucionais envolvendo organizações financeiras que passaram a ocorrer durante o final da década de 1990. A lógica foi formulada em linha com os acordos *Basileia II* e *Basileia III*, que regulamentam a atividade bancária. Tal alinhamento é notado nos três pilares fundamentais do

acordo europeu: Pilar I: padronização das formas de mensuração das reservas de capital, mais especificamente o CMR e o CS; Pilar II: Princípio “*The Own Risk and Solvency Assessment*”, qualitativo dos controles internos de gerenciamento de riscos e estabelecendo processos de Governança Corporativa, e finalmente; Pilar III: concomitância dos princípios estabelecidos anteriormente inseridos nos mecanismos de divulgação e *reporting*, essencialmente com os seguintes relatórios: “*Solvency & Financial Condition Report (SFCR)*” e “*Regulatory Supervisory Report (RSR)*”.

O Capítulo VI do Título I do acordo Solvência II é o que define as regras dos três aspectos do mercado segurador fundamentais para o assunto abordado em nosso estudo: o CS, o CMR, e os ativos garantidores das provisões técnicas, com suas respectivas regras para investimento. Nesse sentido, a regulação estabelece o CS como o valor em risco (*Value at Risk*) dos fundos próprios da seguradora que deve cobrir minimamente os riscos de subscrição de seguros de vida, não-vida, de doença, e também os riscos de mercado, crédito e operacional. Já o CMR é calculado em função de variáveis como as provisões técnicas, os prêmios emitidos, impostos diferidos, despesas administrativas, e o capital em risco, não podendo ser inferior a 25% nem superior a 45 % do requisito de CS. Relacionado à política de investimentos, o documento estabelece alguns critérios gerais para aplicação dos recursos, sempre de modo a garantir que o objetivo único e exclusivo de tais aplicações seja o lastreamento das provisões e constituição dos capitais. Porém, não são definidos limites claros, tampouco quais são as classes de instrumentos financeiros que uma seguradora pode investir.

No Brasil, o regulador nacional adotou os princípios do Solvência II. Na adequação das normas locais, os reguladores do mercado editaram a Resolução CNSP nº 321/2015, estabelecendo a definição de um CB que deve ser mantido a qualquer instante de tempo da operação de uma seguradora, mensurado como a soma de uma parcela fixa de R\$1.200.000,00 com uma parcela variável a depender da região onde a supervisionada realiza as suas atividades. Para operar em todo o país, o CB é avaliado em R\$15.000.000,00. Neste ato normativo também é definido um CR, calculado com base nos riscos de subscrição, crédito, mercado e operacional, análogo ao cálculo do CS no documento europeu. Sobretudo, é interessante notar que o CMR deve ser o maior valor entre o CB e o CR.

Com relação aos ativos garantidores das provisões técnicas, a Resolução CMN nº 4444/2015 disciplina a constituição dos tipos de investimentos e suas respectivas porcentagens de alocação nas modalidades de RF, RV, Imóveis Urbanos e Fundos Imobiliários. Em cada tipologia há uma grande diversidade de critérios para a alocação desses recursos, dependendo do ramo de atuação securitário da supervisionada. Especificamente a Seção II do Capítulo III preconiza a possibilidade de investir até 100% dos recursos de RF em títulos da Dívida Pública Mobiliária Federal interna, créditos securitizados pela Secretaria do Tesouro Nacional e cotas de fundos de investimentos específicos; até 75% em valores mobiliários ou ativos financeiros de renda fixa e debêntures de infraestrutura (com determinadas regras); até 50% em obrigações ou coobrigações de instituições financeiras e em cotas de fundos de investimentos específicos.

Dentre os ativos de RV, pode-se alocar até 100% em ações de companhias abertas (com determinadas regras) e em cotas de fundos de investimento de condomínio aberto em que a carteira tenha como risco principal a variação de preços de ações que respeitem as regras específicas dadas anteriormente; até 75% na combinação do somatório de investimentos envolvendo ações de companhias abertas que permitam a existência de ações ordinárias e preferenciais acompanhadas de direitos adicionais, devendo o conselho administrativo ser composto por no mínimo cinco membros, dos quais 20% devem ser independentes, e em cotas de fundos de investimentos de condomínio aberto cujo risco principal seja a variação de preços de ações enquadradas pela norma. Finalmente, há outras combinações para a alocação em RV. Porém, por motivos de objetividade e demasiada densidade informacional, apresentaram-se apenas as principais.

2.2 Literatura científica: teórica e empírica

A Teoria da Ruína é uma das estratégias teóricas mais recorrentemente utilizada para analisar a capacidade de um ente segurador manter-se solvente ao longo do tempo. Uma seguradora é decretada falida (ou em *estado de ruína*) quando ela não possui patrimônio suficiente para honrar compromissos assumidos. Matematicamente, o estado de ruína é uma abstração da realidade: uma firma com capital negativo não é necessariamente impedida de operar. Tampouco aquela empresa que tenha uma unidade de capital excedente pode ser considerada apta a negociar contratos. Portanto, é primordial estabelecer um marco (o capital nulo) como balizador para simulação das possíveis situações futuras.

A natureza aleatória das oscilações financeiras de um ente segurador só pôde ser modelada graças à evolução histórica das teorias probabilísticas e estocásticas entre o final do século XIX e meados do século XX. Segundo Bowers et al. (1997), a Teoria da Ruína fora desenvolvida pelas escolas escandinava e italiana, com o pioneirismo de Lundberg (1903), complementado anos mais tarde por Cramér (1930), fundamentando as bases do principal objeto analisado na Matemática Atuarial Não-Vida: a Teoria do Risco Coletivo. Por outro lado, DeFinetti foi um defensor da utilização estritamente subjetiva da interpretação de probabilidade. Ele defendia o argumento que os eventos seguráveis são únicos e, portanto, não podem ser medidos utilizando a interpretação frequentista de reprodutibilidade de eventos. O pioneirismo da escola italiana é bem resumida por Feduzi et al. (2012). O desenvolvimento da Teoria do Risco mostra que a maioria dos trabalhos seguiram a escola escandinava de Cramér (1930) e Lundberg (1903), preconizando a mensuração objetiva da probabilidade, inclusive por métodos de simulação.

Da escola escandinava surgiu o modelo de risco mais clássico da literatura: Cramér-Lundberg, no qual o patrimônio líquido de uma companhia é regido por um fluxo de caixa, sendo tratado como um processo estocástico que cresce com o recebimento das receitas certas provenientes da coleta de prêmios junto aos segurados, e diminui conforme os pagamentos de sinistros (aleatórios) incorridos a cada instante de tempo.

Entretanto, mesmo após mais de 100 anos de desenvolvimento acadêmico do tema, com diversas sofisticações propostas na teoria inicial, a comunidade científica atuarial ainda não encontrou resultados analíticos padronizados para uma metrificação da ruína de seguradoras. Um artigo seminal da literatura é De Vylder & Goovaerts (1988), em que os autores exploram a probabilidade de sobrevivência (ou de não ruína) aplicando os princípios do modelo clássico, implementando o Processo de Poisson para descrever a frequência com que os sinistros ocorrem, comparando os seus resultados finais com o trabalho de Wikstad (1971). Outro clássico é Panjer (1981), no qual foi sintetizada a fórmula recursiva para obter as convoluções de quantificação do sinistro agregado. Especificamente, propõe-se uma solução algorítmica e analítica para as distribuições Poisson, Binomial, Binomial Negativa e Geométrica.

Já Dufresne & Gerber (1989) expuseram distintos métodos de estimação da ruína, dois dos quais guardam relação com o nosso estudo, são eles: (i) a metodologia da análise dos limites superiores e inferiores originalmente proposto por Goovaerts & De Vylder (1984); (ii) uma generalização da pesquisa de Bohman (1971), em que, partindo de uma distribuição exponencial para a severidade, ou de transformações dessa distribuição, o autor consegue obter uma fórmula mais facilmente tratável para o problema. Como será discorrido a seguir, este tema ainda desperta interesse não só de acadêmicos, mas também de órgãos reguladores, com o objetivo de se estabelecer metodologias padronizadas que assegurem a obtenção de um estimador da probabilidade de ruína confiável, como ferramenta para análise da capacidade de solvência securitária.

Bowers et al. (1997) trazem uma ampla revisão da evolução teórica dos métodos de obtenção para os valores exatos da probabilidade de ruína. Todavia, os autores enfatizam que o cálculo deste funcional só é viável para uma classe bastante restrita de distribuições convolutas, especifi-

camente Processos de Poisson combinados com a distribuição Exponencial. Textos mais recentes (Kaas et al., 2002) fazem o mesmo alerta, mesmo quando são usadas distribuições simples, desde que pertençam à família exponencial, é necessário utilizar algoritmos de aproximação, dado que dificilmente se encontra solução exata, para encontrar limites superiores viabilizando a estimação da probabilidade de ruína. E, exatamente por esta razão, costumam ser muito conservadores. Porém, atualmente, a literatura tem priorizado métodos de simulação computacional de algoritmos como o *bootstrap* e o MMC (Gatto, 2020), por serem justamente capazes de aproximarem com um certo grau de qualidade (com *consistência*) o funcional em questão, replicando assim cenários aleatórios futuros sem maiores complicações. Baumgartner & Gatto (2010) propuseram um método baseado no *bootstrap* para efetuarem a validação das estimativas utilizando testes de hipóteses via a abordagem do p-valor em casos nos quais se conhece as distribuições (e seu resultado exato), como ao utilizar empiricamente a função de perda agregada.

O avanço tanto nos sistemas como nos procedimentos computacionais permitiu aos cientistas investirem mais esforços em estudos que pudessem obter aproximações do real valor da probabilidade de ruína com maior eficiência. Um dos caminhos foi avaliar os impactos que a adoção de contratos de resseguros teria sobre o valor obtido inicialmente. Com isso, a própria Teoria do Risco Coletivo passou a auxiliar a definição da política ideal de resseguro a ser contratado. Nesse quesito, Kasumo, Kasozi & Kuznetsov (2018) fazem uma abordagem focada na comparação entre os impactos de dois tipos de resseguros (proporcional e o excesso de danos) na mensuração final do funcional da probabilidade de ruína, que é obtido através do método da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, cuja origem remete à Mecânica Estatística e do Controle Estocástico.

No Brasil, apesar da adesão ao acordo Solvência II, este tema não é frequentemente explorado. Dentre os poucos trabalhos, tem-se o de Euphasio Junior & Carvalho (2022), que avaliam com uma base de dados reais de uma seguradora os diferentes choques que a adoção de variados tratados de resseguros teriam sobre a probabilidade de ruína e o CS desta sociedade seguradora estimando-se as distribuições de severidade dos sinistros para 30 ramos de seguros. Já Sobrinho (2009) simula o método de aproximação proposto por Dickson & Waters (1991).

Há na literatura as mais diversas modificações no modelo clássico de risco. Uma delas é destacada: Xu et al. (2018), sobretudo porque a ideia central destes autores é comparar os impactos de um contrato de resseguro na probabilidade de ruína final de uma entidade securitária, e inclusive verificar a perturbação causada pela adoção da suposição de realização de investimentos com o estoque de capital. Neste trabalho, os autores revisam o modelo de risco correlacionado com choques de Poisson comuns dependentes, estrutura que foi apresentada por Hu & Zhang (2016). A inovação trazida por Xu et al. (2018) é a utilização da equação de Hamilton-Jacobi-Bellman, e, dada a inexistência de uma solução explícita para a fórmula, os autores optam por encontrarem o limite superior exponencial mais estrito possível para a probabilidade de ruína, i.e., a desigualdade de Lundberg. Por outro lado, Dickson & Qazvini (2016) examinam como injeções de capital via patrimônio líquido podem afetar a probabilidade de ruína, encontrando soluções analíticas para a probabilidade de sobrevivência em tempo finito usando distribuições exponenciais.

De acordo com Badaoui & Fernández (2013), o uso dos conceitos físicos da Mecânica Analítica (como a equação de Hamilton-Jacobi-Bellman) também podem ser vistos em Hipp & Plum (2000), em que a estratégia ótima para investimento minimiza a probabilidade de ruína. Além disso, os autores consideram que o ativo onde o capital é investido, segue um modelo regido por um Movimento Browniano Geométrico. Este é outro conceito físico constantemente vinculado à literatura atuarial, de modo que é comum ver artigos que se utilizam da abordagem da equação hamiltoniana para a escolha da estratégia ótima de gerenciamento de riscos em conjunto com o uso de processos estocásticos para se modelar o comportamento dos ativos financeiros aos quais uma seguradora aloca o seu capital. Outro caso similar é o de Fernández et al. (2008), em que é encontrada

uma solução explícita para a Equação de Hamilton-Jacobi-Bellman quando um segurador possui uma função de utilidade exponencial perante o risco.

Outro tipo de abordagem para o tema é encontrado em Dong & Wang (2018). Neste estudo é proposto um modelo de risco bidimensional, em que uma seguradora opera concomitantemente em duas linhas de negócio, e cujo comportamento das severidades dos sinistros segue uma distribuição bivariada de Sarmanov. Ainda, considera-se a possibilidade de retornos financeiros modelados estocasticamente por meio de dois processos geométricos de Lévy. Tamturk & Utev (2018) também adotam uma metodologia inovadora ao estimar a probabilidade de ruína valendo-se das vantagens propiciadas pela implementação de conceitos da Mecânica Quântica.

Apesar de haver avanços recentes da literatura internacional na busca por um modelo mais geral de risco coletivo para captar a dinâmica idiossincrática de uma seguradora, não há unanimidade científica definindo uma metodologia universal que inclua os efeitos da rentabilização de investimentos sobre a medida de ruína final. No Brasil a escassez é ainda maior, pois só se abordou riscos de subscrição (Euphasio Junior & Carvalho, 2022) e/ou segmentos específicos, como Saúde Suplementar (Sá, Maciel Júnior, & Reinaldo, 2017). Ademais, tradicionalmente o Brasil apresenta juros mais elevados do que os demais países. Diante dessas circunstâncias, esta é a lacuna a ser explorada: incorporar os efeitos do risco de mercado no Modelo de Ruína de Cramér-Lundberg e avaliar sua relação com os riscos de subscrição. Afinal, a rentabilização do estoque de capital pode mitigar os custos de oportunidade da seguradora ao reduzir a alocação de CS, trazendo implicações práticas para a indústria de seguros.

3 METODOLOGIA

3.1 Processo de Cramér-Lundberg e a Probabilidade de Ruína

De acordo com Bowers et al. (1997), o processo clássico de Cramér-Lundberg pode ser descrito a partir da seguinte equação matemática:

$$U_t = U_0 + P_t - S_t, \text{ para } t \geq 0 \quad (3.1)$$

em que U_t denota o capital de uma entidade securitária em determinado instante de tempo t , P_t é o montante de prêmios no instante t , recebidos a uma taxa constante $c = (1 + \theta) \cdot E[S_{Ag}] > 0$ para o intervalo $[0, t)$, com $\theta \geq 0$ denotando a margem de segurança, e S_t o sinistro agregado (S_{Ag}) ocorridos em t . Note que U_0 representa o capital de solvência (inicial) da firma, ou seja, o capital mínimo requerido para iniciar as suas atividades em determinado ramo de seguros, sendo este o objeto secundário de nossas análises.

A parcela aleatória da Equação 3.1 – o sinistro agregado – é obtido a partir de uma convolução de duas variáveis aleatórias importantes para a dinâmica de um contrato de seguro: a *frequência* e a *severidade* dos sinistros. Portanto, trata-se de um somatório de variáveis aleatórias com uma quantidade aleatória de parcelas, definido como:

$$S_{Ag} = \sum_{t=1}^{N(t)} X_t \quad (3.2)$$

em que $N(t)$ é o número de indenizações ocorridas no intervalo $(0, t]$; $\{X_t\}$ é uma variável aleatória contínua positiva independente e identicamente distribuída, e independente de $\{N(t)\}_{t \geq 0}$, representando a severidade individual de cada sinistro. Assume-se que $N(t) - N(t - 1)$ segue uma distribuição de Poisson com parâmetro definido λ . Já $\{X_t\}$ seguirá uma distribuição Exponencial de média $1/\beta$. Ambas as variáveis aleatórias são estacionárias invariantes no tempo e remetem a resultados clássicos da literatura.

A escolha destas duas distribuições foi intencional, porque é o único caso teórico em que há uma solução analítica para o valor da probabilidade de ruína, em função dos parâmetros, como Dufresne & Gerber (1989) e Bowers et al. (1997) apontam em seus trabalhos. Com isso, é possível tratar experimentalmente modificações na estrutura algébrica do modelo. A solução analítica exata, dado U_0 , é definida por:

$$\psi(U_0) = \frac{1}{1+\theta} \cdot \exp\left(-\frac{\theta \cdot \beta \cdot U_0}{1+\theta}\right) = \frac{1}{1+\theta} \cdot \exp(-R \cdot U_0), \quad (3.3)$$

com $R = (\theta \cdot \beta / (1 + \theta))$ sendo o coeficiente de ajuste (Kaas et al., 2002). Tal fator pode inclusive, ser interpretado como um parâmetro mensurador da medida de descasamento entre os fluxos de receitas e despesas de uma seguradora.

Além disso, é possível definir também o Limite Superior de Lundberg para esse caso específico de distribuição convoluta de severidade agregada, sendo um funcional de estimação ainda mais conservador do que o proposto pela Equação 3.3, justamente por não considerar o nível de amortecimento da severidade dos sinistros oriundo da margem de carregamento, conforme mostra a Equação 3.4:

$$\psi_{max}(U_0) = \exp\left(-\frac{\theta \cdot \beta \cdot U_0}{1+\theta}\right) = \exp(-R \cdot U_0), \quad (3.4)$$

Logo, as soluções apresentadas nas Equações 3.3 e 3.4 consideram apenas o impacto da distribuição exponencial na mensuração final de $\psi(U_0)$, porém, o processo em estudo é do tipo Poisson Composto, de forma que tal fato enseja a incorporação da variável aleatória $N(t)$ na fórmula fechada do valor final observado. Então, isto implica necessariamente que R passa a não deter mais uma expressão analítica, demandando uma aproximação \tilde{R} , para incorporação dos efeitos das frequências de ocorrências dos sinistros ao longo do processo de risco.

Para a obtenção dessa aproximação, é necessário considerar primariamente que S_{Ag} segue um processo de Poisson Composto com média e variância dados respectivamente por: $E[S_{Ag}] = E[X] \cdot E[N(t)]$ e $Var[S_{Ag}] = Var[X] \cdot E[N(t)] + (E[X])^2 \cdot Var[N(t)]$. Portanto, pela aproximação linearizada da função $M_{S_{Ag}}(\tilde{R})$, pode-se utilizar uma expansão infinita por séries de Taylor para isolar o \tilde{R} , segundo a Equação 3.5:

$$1 = \ln[M_{S_{Ag}}(\tilde{R})] \cong \mu \tilde{R} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \tilde{R}^2 + (\dots) > \mu \tilde{R} + \frac{1}{2} \cdot \sigma^2 \cdot \tilde{R}^2 \quad (3.5)$$

em que $\mu = E[S_{Ag}]$ e $\sigma^2 = Var[S_{Ag}]$. Igualando os extremos das igualdades à direita e à esquerda da Equação 3.5, é possível obter solução única aproximada para \tilde{R} , em função dos momentos do Processo de Poisson Composto:

$$\tilde{R} \cong \frac{2 \cdot (c - \mu)}{\sigma^2} = \frac{2 \cdot \theta \cdot E[X] \cdot E[N(t)]}{Var[X] \cdot E[N(t)] + (E[X])^2 \cdot Var[N(t)]}. \quad (3.6)$$

Consequentemente, como $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda)$, com esperança e variância iguais a λ , reduz-se a Equação 3.6 a:

$$\tilde{R} \cong \frac{2 \cdot \theta \cdot E[X]}{E[X^2]} \quad (3.7)$$

Assim, uma solução aproximada para a probabilidade de ruína é alcançada, considerando apenas os impactos dos primeiro e segundo momentos da variável aleatória S_{Ag} , ignorando variações advindas da assimetria e curtose (terceiro e quarto momentos):

$$\psi(U_0) = \frac{1}{1+\theta} \cdot \exp\left(-\frac{2 \cdot \theta \cdot E[X] \cdot U_0}{E[X^2]}\right), \quad (3.8)$$

Portanto, o Limite Superior de Lundberg para o Processo de Poisson Composto é:

$$\psi_{max}(U_0) = \exp\left(-\frac{2 \cdot \theta \cdot E[X] \cdot U_0}{E[X^2]}\right). \quad (3.9)$$

3.2 Processo de Cramér-Lundberg com rentabilização do estoque de capital

A inovação fundamental trazida por este artigo baseia-se na incorporação da taxa de juros no excesso de capital do processo de risco de Cramér-Lundberg, que foi proposto para modelar o risco de subscrição. A ideia básica é que a seguradora investe em ativos garantidores – respeitando a Res. CMN nº4444/2015 – todo o estoque de capital disponível: o patrimônio líquido (U_{t-1}) disponível, acrescido dos prêmios antecipados. Destarte, o processo de Cramér-Lundberg modificado tem a seguinte estrutura:

$$U_t = [(U_{t-1} + P_t) \cdot (1 + i)] - S_t, \text{ para } t \geq 0 \quad (3.10)$$

em que i representa a capacidade de rentabilização do estoque de capital da seguradora. Serão arbitrados, então, alguns valores possíveis para esta taxa, sendo estes, oriundos de uma combinação da possível rentabilidade entre ativos de RF e de RV.

Para melhor compreensão de como ocorre a rentabilização do estoque de capital, será adotado que $P_t = c = (1 + \theta) \cdot E[S]$, prêmios constantes coletados a cada período. Assim, o primeiro instante de tempo terá $U_1 = [(U_0 + c) \cdot (1 + i)] - S_1$. No segundo momento, $U_2 = [(U_1 + c) \cdot (1 + i) - S_2]$. Portanto, recursivamente, pode-se escrever U_2 da seguinte forma:

$$U_2 = [(U_0 + c) \cdot (1 + i)^2] - S_1 \cdot (1 + i) - S_2 + c \cdot (1 + i) \quad (3.11)$$

Para o terceiro instante, tem-se que:

$$U_3 = [(U_0 + c) \cdot (1 + i)^3] - S_1 \cdot (1 + i)^2 - S_2 \cdot (1 + i) + c \cdot (1 + i) + c \cdot (1 + i)^2 - S_3 \quad (3.12)$$

Procedendo recursivamente de maneira análoga, é possível obter uma equação generalizada do modelo proposto, dada por:

$$U_t = U_0 \cdot (1 + i)^t + c \cdot \sum_{j=1}^t (1 + i)^j - \sum_{j=1}^t S_j \cdot (1 + i)^{t-j} \quad (3.13)$$

A importância de se auferir uma forma geral, como a explicitada pela Equação 3.13, dá-se pelo fato de que agora é possível compreender o efeito da taxa de juros não apenas sobre o estoque de capital, mas também sobre o sinistro agregado. Contudo, o fator responsável por fazer a atividade seguradora possuir receitas financeiras é a taxa de juros, incidindo sempre uma unidade temporal nos prêmios coletados, que são investidos em conjunto com o capital inicial.

Diante do exposto, uma maneira de estimar a probabilidade de ruína é por meio do número esperado de vezes que uma seguradora possui seu capital integralmente consumido (nulo) ou negativo nas simulações por MMC de cenários futuros em que ocorrem diferentes tipos de sinis-

tros concomitantemente com variadas formas de arrecadação de prêmios e estratégias de investimentos. Segundo Kaas et al. (2002), a partir da Equação 3.1, é possível definir a variável aleatória T como o primeiro instante de tempo em que a ruína ocorre:

$$T = \min \{t: t \geq 0 \text{ e } U_t < 0\}, \quad (3.14)$$

e, dessa forma, a probabilidade de ruína $\psi(U_0)$ pode ser expressa em função do capital inicial U_0 e da variável aleatória T :

$$\psi(U_0) = Pr(T < \infty | U_0), \quad (3.15)$$

ou,

$$\psi(U_0) = P[U_t < 0 | U_0]. \quad (3.16)$$

Assim, o estimador do funcional que expressa a probabilidade de ruína será definido de forma análoga a Baumgartner & Gatto (2010), e sua quantificação será conforme a Equação 3.17 a seguir, em que n será uma quantidade suficientemente grande de trajetórias ($n = 10.000$).

$$\hat{\psi}(U_0) = \frac{\#(U_t < 0, t > 0)}{n}. \quad (3.17)$$

3.3 O algoritmo de simulação

O modelo proposto foi implementado computacionalmente no *software* R versão 4.0.0, utilizando dados simulados. Para isso, foi necessária a definição antecipada dos parâmetros que permaneceriam constantes ao longo das simulações enquanto eram geradas as perturbações intencionais na variável de controle i (taxa real de rentabilidade dos ativos). A abordagem de estimação será via MMC, que é fortemente estável para estimar o funcional com a maior precisão possível (Gatto & Mosimann, 2012; Gatto, 2020). Realizaram-se 10 mil ensaios de possíveis trajetórias estocásticas que U_t teria segundo as Equações 3.10 e 3.13. O horizonte máximo t em uma escala anual foi fixado em 200 anos. Como decorrência, a avaliação do capital inicial visando garantir a solvência da carteira seguirá o marco regulatório do Solvência II, que estabelece aos seguradores europeus a necessidade de constituição de reservas que assegurem tais entidades de incorrerem em ruína, no máximo, uma vez em 200 anos (ou seja: máxima probabilidade de ruína de 0,5%).

Destaca-se que, como subprodutos de cada cenário simulado, serão obtidas duas estatísticas referentes às principais variáveis de interesse em nosso estudo: (i) a *probabilidade de ruína*, e; (ii) o *tempo esperado até a ruína*. Em particular, a primeira é dada pela Equação 3.17, e a segunda será definida a partir da média dos valores temporais do horizonte t , das trajetórias estocásticas que incorreram em ruína, de acordo com a Equação 3.14. Pela convergência da Lei dos Grandes Números do funcional de ruína, iterou-se por mil vezes as simulações de cada cenário. Assim, obteve-se um vetor aleatório de resultados para o par das variáveis em questão, de modo que seja possível extrair a variância do estimador e que as médias amostrais tendem a se aproximar dos respectivos verdadeiros valores desconhecidos.

Tabela 1 – Visão Geral das Variáveis do Modelo proposto e as definições de seus valores

Variáveis do Processo de Risco Modificado	
$U_t = [(U_{t-1} + P_t) \cdot (1 + i)] - S_t$ (em R\$)	Fluxo de caixa rentabilizado a uma taxa de juros i . Descreve uma dentre as 10 mil possíveis trajetórias simuladas para esse processo estocástico em cada cenário, com U_0 e i fixos.
U_0 ($t = 0$ é uma convenção para determinar o capital inicial)	Variável de entrada: 11 capitais diferentes (de R\$0 até R\$500mil) com espaçamentos de R\$50 mil.
i (taxa de juros / rentabilidade)	Variável de entrada: provocará as perturbações de interesse na probabilidade de ruína. Utilizou-se 9 taxas: -3%; -2%; -1%; -0,5%; 0; 0,5%; 1%; 2%; 3%
$\theta = 0,2$	Variável de entrada: representa carregamento de segurança aplicado sobre o prêmio cobrado. Definiu-se como sendo de 20%, mas de controle variável.
$P_t = c = (1 + \theta) \cdot E[S_{Ag}]$	Prêmios arrecadados a cada instante de tempo t . Será constante e dependente dos parâmetros das distribuições de $N(t)$ e X_j .
$S_{Ag} = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j$	Sinistro agregado no instante de tempo t . Convolução das variáveis aleatórias: $\{N(t)\}_{t \geq 0} \sim Poi(\lambda)$ e $X_j \sim Exp(\beta)$.
$\{N(t)\}_{t \geq 0} \sim Poisson(\lambda)$ (com $\lambda = 100$)	Variável aleatória que representa a frequência com a qual ocorrem os sinistros. Seguirá uma distribuição Poisson de parâmetro λ . Definiu-se igual a 100, mas, assim como o carregamento de prêmios, de controle variável.
$\{X_j\} \sim Exponencial(\beta)$ (com $\beta = 1/10000$)	Variável aleatória que representa a severidade de cada sinistro que ocorreu no instante de tempo t . Seguirá uma distribuição Exponencial de parâmetro β . Tem valor esperado (média) de R\$10.000, mas de controle variável.
Estimação da Probabilidade de Ruína	
$\hat{\psi}(U_0) = \frac{1}{1000} \cdot \sum_{k=1}^{1000} \left(\frac{\#(U_t < 0, t > 0)}{n} \right)_k$	Funcional da probabilidade de ruína, sensível aos choques experimentais propostos em i e U_0 . Para cada cenário, replicou-se as simulações para se obter 1.000 observações da Equação 3.17 de cada cenário. A média dessas observações é o valor da probabilidade de ruína considerado.
$\psi(U_0) = \frac{1}{1 + \theta} \cdot \exp\left(-\frac{2 \cdot \theta \cdot E[X] \cdot U_0}{E[X^2]}\right)$ – Equação 3.8	Resultado Teórico exato da probabilidade de ruína. Não considera o efeito da taxa de juros.
$\psi_{max}(U_0) = \exp\left(-\frac{2 \cdot \theta \cdot E[X] \cdot U_0}{E[X^2]}\right)$ – Equação 3.9	Limite Superior de Lundberg: estimativa mais conservadora, pois desconsidera os efeitos da taxa de juros e do fator de carregamento.
$Tempo\ esperado\ até\ a\ ruína = \frac{\sum_{k=1}^{1000} T_k \cdot \mathbf{1}\{T_k < \infty\}}{1000}$	Para cada uma das 10.000 trajetórias simuladas que incorreram em ruína, armazenou-se o tempo de sua ocorrência. “1” representa a função indicadora de ruína. Replicam-se 1.000 vezes esse mesmo procedimento, de modo que a média dessas 1.000 observações é a estimativa do tempo médio a ser considerado para cada cenário.

Fonte: Elaborado pelos autores.

4 RESULTADOS

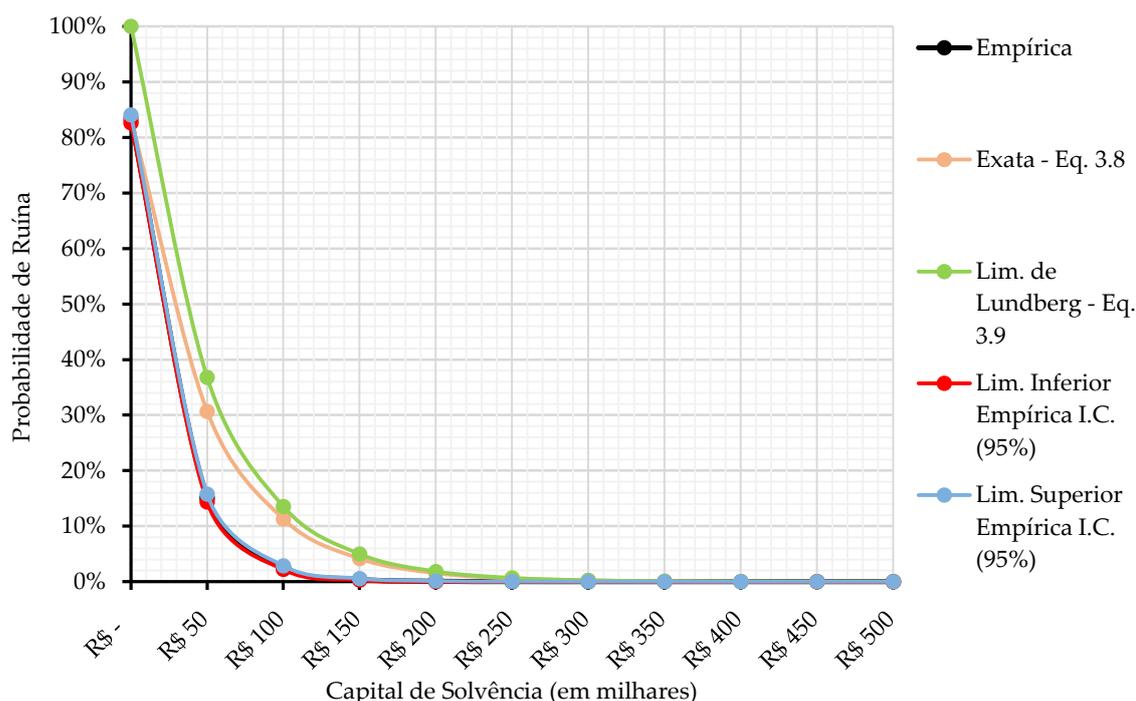
A ideia central deste trabalho é averiguar os efeitos que mudanças substanciais na taxa de rentabilidade do estoque de capital do modelo modificado de Cramér-Lundberg teriam sobre o valor empírico da probabilidade de ruína. Em seguida, definir-se-á o valor otimizado do capital inicial (CS) que reduziria o valor do funcional estimado, avaliando também o comportamento do tempo esperado até a eventualidade da ruína. É importante frisar que a taxa de juros representa a rentabilidade de uma suposta carteira de investimentos que uma seguradora venha a possuir no mercado financeiro. Em geral, as rentabilidades escolhidas estão em conformidade com um padrão diverso de combinações entre ativos de RF e RV que em conjunto produzem os resultados financeiros inseridos sobre o percentual escolhido para i .

4.1 Cenários-Base e trajetórias de risco

As primeiras simulações consideraram o caso mais simples, em que a evolução do processo de risco é tal que não existe a rentabilização do estoque de capital ($i = 0\%$). Esta situação é interessante pelo fato de ter o modelo clássico de Cramér-Lundberg como caso particular do modelo proposto pela Equação 3.10. Mais interessante ainda: dado que o processo de risco segue trajetórias cujos termos de sinistro agregado possui uma distribuição Poisson Composta (convolução de uma Poisson com uma Exponencial), há uma resposta aproximada a este problema obtido pela teoria clássica (Equação 3.8), que considera os dois primeiros momentos da Poisson Composta. Ademais, obteve-se também a solução mais conservadora possível descrita pelo Limite Superior de Lundberg (Equação 3.9).

A Figura 1 apresenta o comportamento da probabilidade de ruína para os Cenários-Base. Nela, são apresentadas as três curvas da probabilidade de ruína em função do capital inicial, uma para a estimação empírica e as outras duas para os modelos teóricos. Acrescentou-se ainda o intervalo de confiança de 95% para a curva empírica.

Figura 1 – Curvas Teóricas e Empírica de Probabilidade de Ruína para o Cenário Base do estudo considerando-se: $i = 0\%$ | $\theta = 20\%$ | $\lambda = 100$ | $\beta = 1/10000$



Fonte: Elaborado pelos autores.

Pela Figura 1 percebe-se duas características já esperadas para o comportamento das curvas: a primeira é o decaimento exponencial das probabilidades de ruína nas estimações, indicando que os resultados de simulação seguiram o padrão esperado. A segunda conclusão é o fato de a configuração da curva empírica estimada seguir um processo com alguma variância. Esta última particularidade está em consonância com o fato de que o funcional da probabilidade de ruína $\hat{\psi}(U_0)$ é uma variável aleatória (Baumgartner & Gatto, 2010). Além disso, a distância entre as curvas estimada e teórica diminui à medida que aumenta o CS, de modo que valores iniciais de U_0 próximos da ordem de R\$250 mil passam a não implicar diferenças significativas entre as três curvas.

Paralelamente, o elevado número de simulações realizadas para as trajetórias de risco estimadas para o Cenários-Base revelou que o funcional empírico detém pouca variação. Ou seja, há praticamente uma superposição entre a aproximação empírica, e seus respectivos limites do intervalo de confiança, explicando assim a robustez dos números obtidos pelo algoritmo. Na Tabela 2 são apresentadas as principais diferenças entre as curvas, bem como as características da variável aleatória tempo esperado até a ruína e também as estatísticas descritivas de tais variáveis.

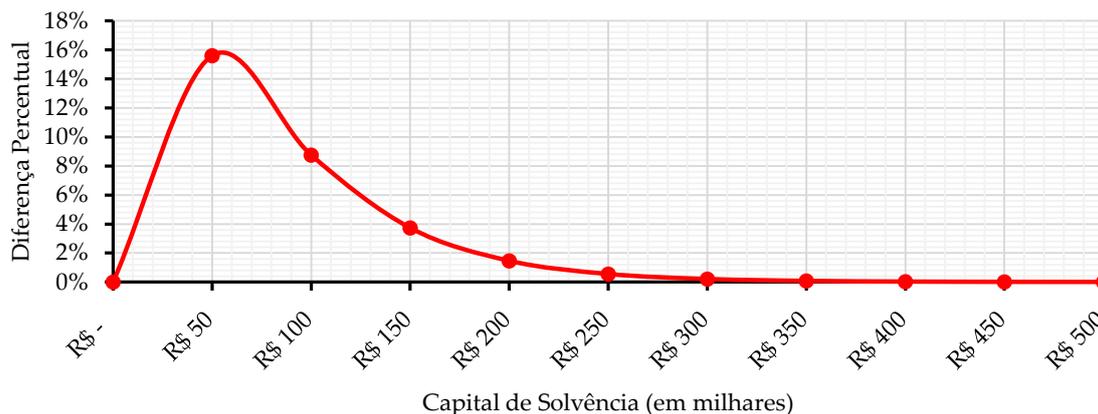
Tabela 2 – Probabilidades de ruína, e respectivos tempos médios até a ocorrência de ruína: Cenários Base

U_0	$\hat{\psi}(U_0)$	Estatísticas Descritivas $\hat{\psi}(U_0)$	Valores Teóricos		Tempo Médio até a Ruína (Anos)	Estatísticas Descritivas Tempo Médio
		Desvio Padrão	Exata Eq.3.8	Limite de Lundberg Eq. 3.9		Desvio Padrão
R\$0	83,331%	0,0036	83,333%	100,000%	3,460	0,101
R\$50 mil	15,059%	0,0035	30,657%	36,788%	32,951	0,722
R\$100 mil	2,528%	0,0015	11,278%	13,534%	62,226	2,138
R\$150 mil	0,419%	0,0006	4,149%	4,979%	89,070	6,232
R\$200 mil	0,066%	0,0002	1,526%	1,832%	112,905	16,237
R\$250 mil	0,010%	0,0001	0,561%	0,674%	132,550	30,375
R\$300 mil	0,001%	0,0000	0,207%	0,248%	139,105	31,414
R\$350 mil	0,000%	0,0000	0,076%	0,091%	164,154	26,070
R\$400 mil	0,000%	0,0000	0,028%	0,034%	169,000	-
R\$450 mil	0,000%	0,0000	0,010%	0,012%	-	-
R\$500 mil	0,000%	0,0000	0,004%	0,005%	-	-

Fonte: Elaborado pelos autores.

Pela Tabela 2 nota-se que o valor empírico de $\hat{\psi}(U_0 = 0)$ é próximo do valor teórico. Isso mostra a consistência dos processos de risco simulados por estarem em conformidade com a teoria clássica. Contudo, essa proximidade de valores só era de fato esperada para este caso em particular, uma vez que, ao aumentar U_0 , a diferença entre as observações empíricas e teóricas (Equação 3.8) tendem a ser inicialmente maiores, e diminuem à medida que se aloca maior capital, pois as ocorrências de ruína vão se rareando. A razão é que há maior volume de recursos financeiros para se proteger de materializações extremas do sinistro agregado. Sobre as diferenças relativas verificadas na Tabela 2, quando deduzida a Equação 3.8, considerou-se uma aproximação por Séries de Taylor cujos termos remetiam apenas às medidas de tendência central e dispersão da variável aleatória sinistro agregado. Fossem considerados o terceiro e quarto momentos (assimetria e curtose, respectivamente), não seria possível sintetizar uma solução aproximada para a probabilidade de ruína.

A Figura 2 apresenta a diferença estimada entre os valores teóricos e empíricos da probabilidade de ruína em função do capital inicial. Nota-se máxima diferença para capitais próximos a R\$50 mil, e depois tendendo a anular-se conforme aumenta a dominância do capital inicial sobre o coeficiente de ajuste.

Figura 2 – Diferenças relativas dos valores teóricos e empíricos da probabilidade de ruína, em função do CS

Fonte: Elaborado pelos autores.

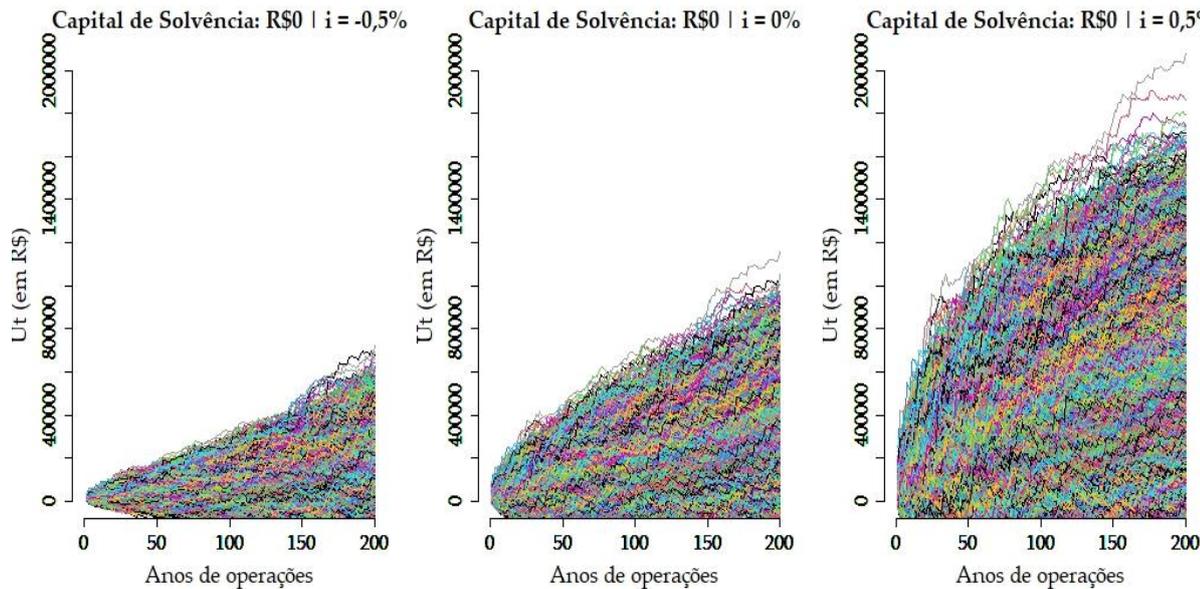
Enfim, com as mensurações obtidas para o tempo esperado até a ocorrência de ruína na Tabela 2, é possível notar que conforme o capital inicial alocado aumenta, o seu valor observado também tende a aumentar. Este efeito é decorrência da redução da probabilidade de ruína pelo maior aporte de CS. Isto é, quando se começa a operar com mais recursos, demora-se mais tempo para que o processo cruze o nível zero, necessitando que ocorram sinistros catastróficos (em frequência e/ou em severidade) nos anos exordiais de operação, levando a seguradora à ruína em seus primeiros anos de atividade.

4.2 Efeito da Taxa de Juros sobre a ruína empírica

Visando melhor compreensão dos efeitos da rentabilização do patrimônio líquido, verificou-se o comportamento das trajetórias de risco de U_t para as seguintes taxas: $i = -0,5\%$; $i = 0\%$ e $i = 0,5\%$. Todas referentes a um mesmo capital inicial nulo, sempre tendo como estrutura comparativa os cenários-base.

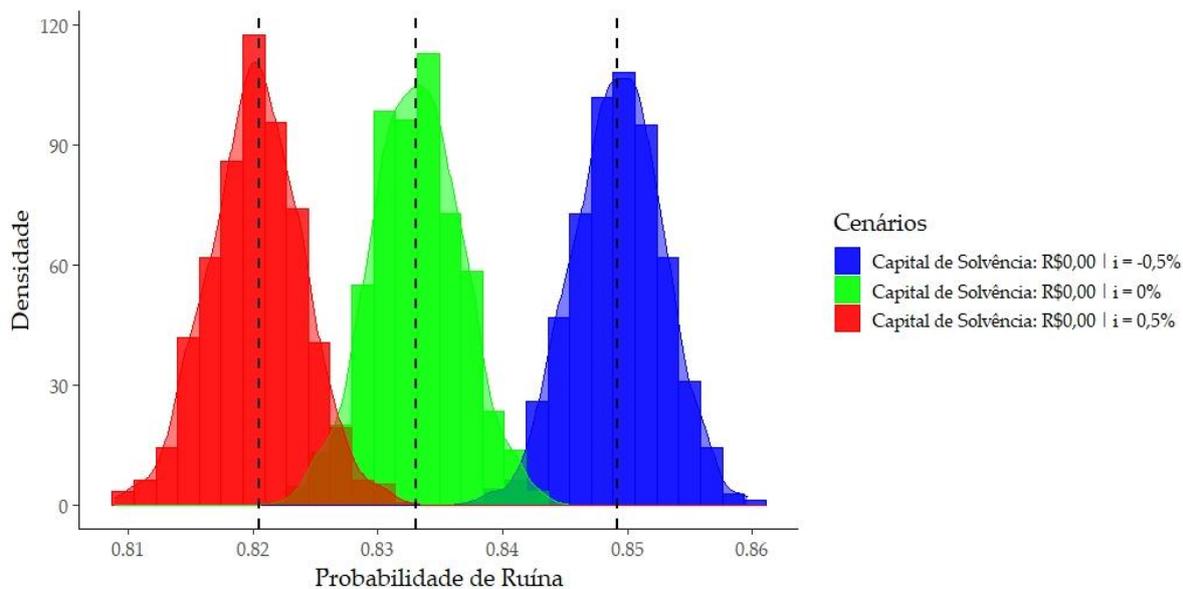
A Figura 3 traz um comparativo gráfico das possíveis 10.000 trajetórias de U_t dentre as curvas simuladas para cada taxa de juros. Nota-se tendência de crescimento (*drift*) da média, quanto maior for a taxa de juros. Na Figura 4 foram inseridos os histogramas das estimativas da probabilidade de ruína de cada um dos cenários. Primeiro, observa-se que o funcional possui distribuição Normal, alinhado à literatura (Baumgartner & Gatto, 2010). Mais: a probabilidade estimada (tracejado vertical) é maior para taxas de juros negativas e menor para taxas de juros positivas, indicando redução de probabilidade de falência para maiores taxas de investimentos, resultado compatível com a representação dos processos de risco modificado.

Figura 3 – Processos de risco para o Capital de Solvência nulo com modificações na rentabilidade dos investimentos



Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 4 – Comportamento das amostras aleatórias de $\hat{\psi}(U_0)$ para seu respectivo cenário



Fonte: Elaborado pelos autores.

A Tabela 3 apresenta as estatísticas descritivas dos valores anuais de todas as curvas para U_t , bem como os casos de máximo e mínimo.

Tabela 3 – Estatísticas descritivas de U_t : comportamento das trajetórias de risco por cenário

Capital de Solvência U_0	R\$0,00			
	Taxas de Juros	-0,50%	0	0,50%
Observação da Amostra Aleatória de $\hat{\psi}(U_0)$		84,85%	83,28%	81,92%
Valor da média amostral $\hat{\psi}(U_0)$		84,923%	83,331%	82,051%
Valor Médio de U_t para a observação de $\hat{\psi}(U_0)$		R\$101.905	R\$198.243	R\$406.120
Desvio Padrão de U_t para a observação de $\hat{\psi}(U_0)$		R\$95.791,95	R\$166.007,70	R\$316.897,00
Valor Máx. que U_t atingiu na observação de $\hat{\psi}(U_0)$		R\$724.863	R\$1.115.692	R\$2.077.735
Valor Mín. que U_t atingiu na observação de $\hat{\psi}(U_0)$		(-)R\$180.197	(-)R\$262.473	(-)R\$482.148

Fonte: Elaborado pelos autores.

Ademais, pela Figura 1 observou-se a tendência de decaimento exponencial da relação entre as probabilidades de ruína quanto maiores forem os CS das entidades seguradoras. Mas de quanto seria tal variação? O aporte de CS estaria vinculado com uma potencialização dessa redução, ou o fator juros seria suficiente para aliviar alocações de reservas? Elucidando esses questionamentos, a Tabela 4 apresenta as respostas.

Tabela 4 – Probabilidade de Ruína: combinação de valores entre U_0 e i

U_0	Taxa de Rentabilização do Estoque de Capital (i)								
	-3%	-2%	-1%	-0,5%	0%	0,5%	1%	2%	3%
R\$0	96,875%	92,543%	87,088%	84,923%	83,331%	82,051%	80,963%	79,118%	77,546%
R\$50 mil	81,715%	57,845%	30,451%	21,105%	15,059%	11,117%	8,330%	4,730%	2,665%
R\$100 mil	74,962%	44,671%	14,119%	6,135%	2,528%	1,042%	0,424%	0,059%	0,007%
R\$150 mil	70,828%	37,588%	7,836%	2,072%	0,419%	0,072%	0,011%	0,000%	0,000%
R\$200 mil	67,767%	32,885%	4,778%	0,773%	0,066%	0,003%	0,000%	0,000%	0,000%
R\$250 mil	65,340%	29,434%	3,086%	0,301%	0,010%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
R\$300 mil	63,336%	26,654%	2,046%	0,118%	0,001%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
R\$350 mil	61,555%	24,400%	1,375%	0,047%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
R\$400 mil	60,008%	22,455%	0,938%	0,018%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
R\$450 mil	58,595%	20,783%	0,634%	0,007%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%
R\$500 mil	57,331%	19,301%	0,430%	0,003%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%	0,000%

Fonte: Elaborado pelos autores.

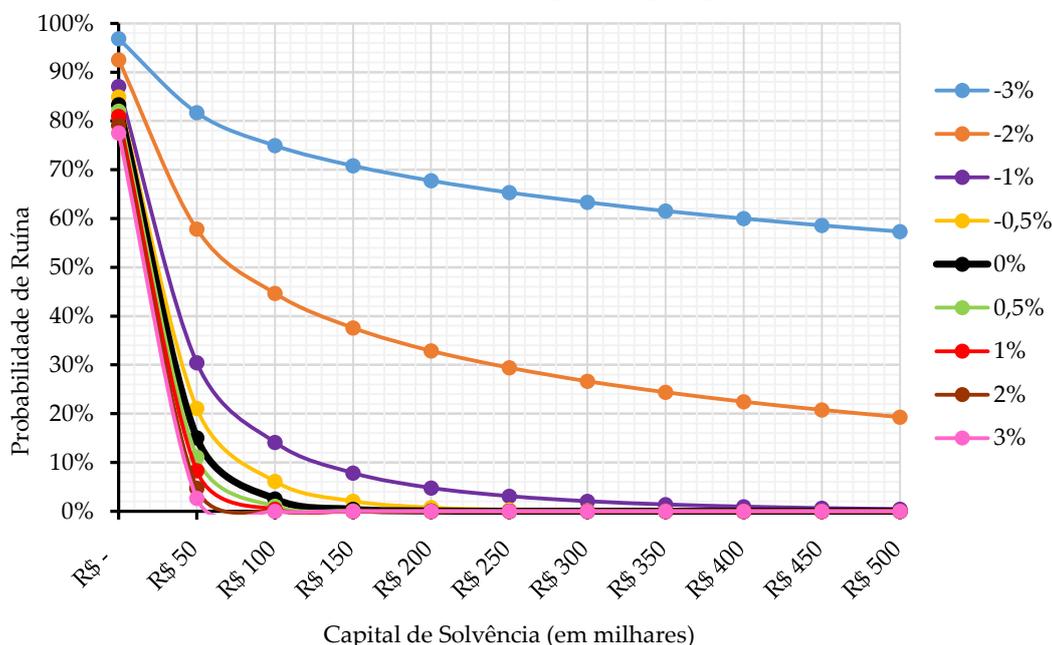
Pela Tabela 4, pode-se examinar dois fatos: (i) CS inferiores a R\$50 mil não são suficientes para atender à legislação do Solvência II em cenários que a seguradora consegue rentabilidade anual real de seus ativos menor ou igual a 3%; (ii) quando as taxas reais de juros são inferiores a -1%a.a., praticamente nenhum aporte inicial de capital foi capaz manter a firma dentro dos padrões exigidos pela regulação europeia, salvo a exceção do capital de R\$500 mil. Para este caso, a probabilidade de ruína estimada foi de 0,43%, ligeiramente inferior ao 0,5% estipulado no protocolo internacional.

Este conjunto de resultados aponta que a simples definição do CS para o gerenciamento de risco de subscrição não é suficiente para atender a regulação. Portanto, resta evidentemente que tal suficiência depende fundamentalmente da combinação de dois fatores: (i) a capacidade da entidade alocar seus ativos garantidores em títulos cujas expectativas de remuneração anual de juros reais sejam as maiores possíveis (dentro das restrições legais), e; (ii) uma definição *ex-ante* do CS. Este resultado é importante por fornecer a sensibilidade da maior necessidade de alocação de CS, em função da queda de taxas de juros auferidas em ativos garantidores.

A Figura 5 traz a relação entre o CS e a probabilidade de ruína, em função de variações das taxas de juros reais. Como apresentado na seção 4.1, dada a escolha da distribuição convoluta de sinistro agregado, a relação de decaimento exponencial permanece. É possível, ainda, constatar

que o efeito taxa de juros passa a ser menos relevante com o aumento de U_0 . Entretanto, quando os juros reais são fortemente negativos (abaixo de -2%a.a.), não importa o nível de capital de solvência apresentado: a probabilidade de ruína é sempre superior a 19%.

Figura 5 – Probabilidade de ruína dada a rentabilização do estoque de capital para diferentes taxas de juros



Fonte: Elaborado pelos autores.

4.3 Efeito da Taxa de Juros sobre o tempo esperado até a ruína

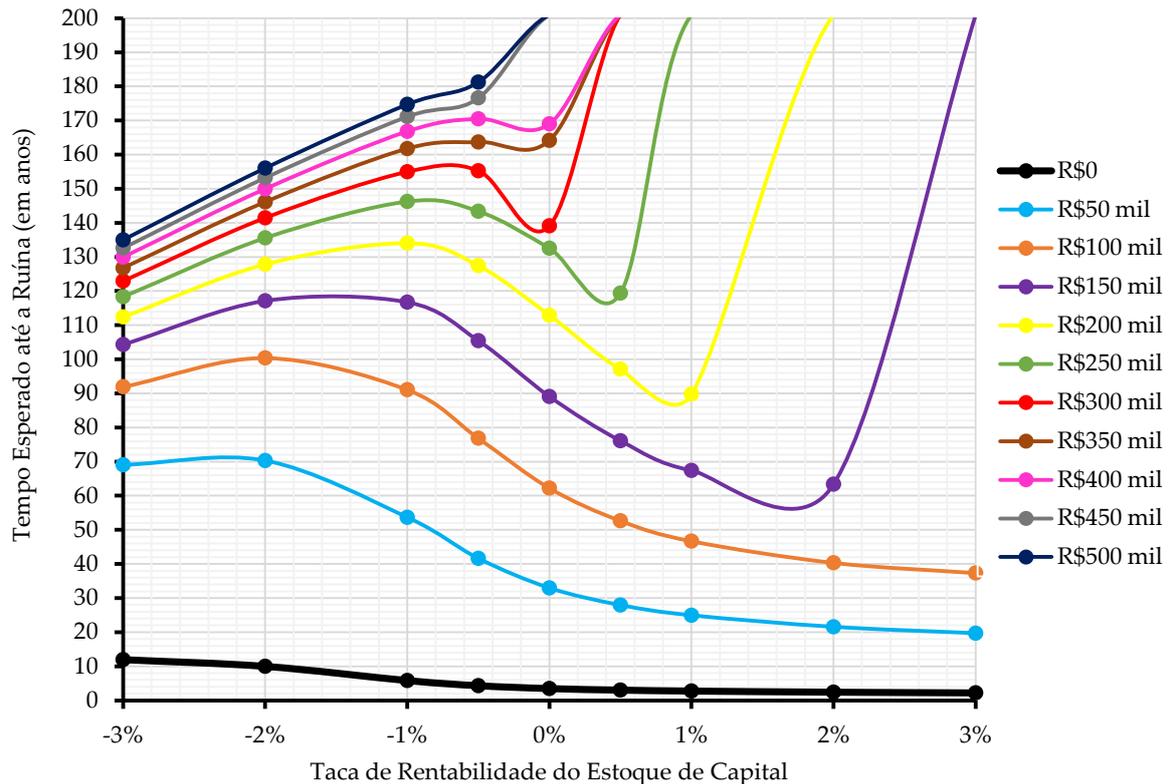
Contraintuitivamente aos resultados esperados, os efeitos das taxas de juros, mantendo U_0 constante, fazem com que o comportamento da variável aleatória *tempo esperado até a ocorrência de ruína* seja diferente de quando se altera apenas o CS para uma mesma rentabilidade. A Tabela 5 e a Figura 6 apresentam uma visão ampla desta dissemelhança.

Tabela 5 - Tempo Esperado até a Ruína (em anos): combinação de valores entre U_0 e i

U_0	Taxa de Rentabilização do Estoque de Capital (i)								
	-3%	-2%	-1%	-0,5%	0%	0,5%	1%	2%	3%
R\$ 0	11,942	9,976	5,813	4,299	3,461	3,011	2,730	2,396	2,196
R\$50 mil	69,039	70,288	53,649	41,620	32,951	27,940	24,930	21,550	19,679
R\$100 mil	91,945	100,378	91,069	76,843	62,226	52,640	46,673	40,333	37,329
R\$150 mil	104,307	117,118	116,726	105,428	89,070	76,099	67,395	63,375	-
R\$200 mil	112,400	127,853	134,047	127,449	112,905	97,117	89,778	-	-
R\$250 mil	118,327	135,573	146,260	143,373	132,550	119,385	-	-	-
R\$300 mil	122,928	141,444	154,955	155,234	139,105	-	-	-	-
R\$350 mil	126,747	146,108	161,743	163,669	164,154	-	-	-	-
R\$400 mil	129,928	149,947	166,802	170,473	169,000	-	-	-	-
R\$450 mil	132,618	153,226	171,159	176,627	-	-	-	-	-
R\$500 mil	134,984	156,030	174,714	181,244	-	-	-	-	-

Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 6 - Tempo Esperado até a Ruína em função das taxas de rentabilidade para diferentes Capitais de Solvência



Fonte: Elaborado pelos autores.

Destaca-se que os dados censurados da Tabela 5 denotam inexistência de ruínas para os cenários nos 200 anos de simulação. Já a Figura 5 evidencia que o tempo esperado até a ruína segue uma tendência inicial de crescimento com a variação positiva de juros (exceto a curva de capital nulo), e decai com diferentes intensidades para capitais de solvência iguais ou inferiores a R\$400 mil. A Figura 6 apresenta o efeito da taxa de juros, com a ocorrência de ruínas no longo prazo, pois, à medida que se aumenta a rentabilidade, o tempo diminui, com as falências ocorrendo mais cedo.

A explicação para este comportamento contraintuitivo é um corolário da Equação 3.13. Nella, verifica-se que os sinistros convolutos de diferentes períodos também são ajustados para considerar o efeito das taxas de juros. Caso os sinistros agregados sejam maiores do que os prêmios acumulados, o efeito da rentabilização maior pode agravar a probabilidade de insolvência. Assim, conclui-se que aumentos do CS faz com que a seguradora seja capaz de gerenciar melhor sinistros de severidade alta no curto prazo, pois este aporte permite a ela maior probabilidade de sobrevivência inicial sendo possível arcar com perdas preambulares. Contudo, o impacto do resultado financeiro sobre o patrimônio líquido só se torna expressivo após um determinado período de constantes aplicações que rendem juros positivos com certa constância. Assim, alta rentabilidade dos investimentos não se mostra eficaz para lidar com ruínas de curto prazo, que deixam de existir somente quando se aloca elevado CS.

Nota-se que medidas de gerenciamento envolvendo capitais superiores ou iguais a R\$150 mil, com rentabilidade de 2% ou mais, já apresentam a completa ausência de ruínas ao longo dos 200 anos. Portanto, verifica-se que decisões isoladas, sejam elas: ou investir todo o estoque de capital na expectativa de retornos financeiros elevados, ou alocar elevado CS, podem conduzir os gestores a uma tática não-otimizada de gerenciamento de riscos. Afinal, ambas possuem a mesma função: evitar ruína. Portanto, os melhores resultados foram aqueles que apresentaram uma combinação entre estas duas estratégias.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresentou o comportamento da probabilidade de ruína em função de variadas taxas de rentabilidade dos ativos garantidores de operações securitárias. Também foi possível avaliar o tempo esperado até a ruína, caso ocorra. Neste aspecto, o estudo é pioneiro na literatura nacional que tenha concentrado atenção nos efeitos da remuneração do estoque de capital sobre o dimensionamento do capital de solvência. Geralmente, o enfoque é dado para as políticas de gerenciamento de risco por meio da contratação de diferentes tratados de resseguro, e por isso a pesquisa inova ao buscar mensurar as quantidades atuariais afetadas pelos retornos advindos de aplicações financeiras.

Inicialmente, foi deduzida uma expressão generalizada para o processo de Cramér-Lundberg, para o desenvolvimento de um processo de risco do tipo Poisson Composto, incorporando uma taxa de rentabilização do estoque de capital. Em seguida, comparou-se os resultados teóricos e empíricos, obtidos por meio do MMC. Pelos resultados constatou-se que entidades que iniciam suas atividades com capitais elevados reduzem sobremaneira a probabilidade de ruína. Contudo, o custo de capital pode tornar-se extremamente alto, afastando possíveis investidores. Além disso, o tempo esperado até a ruína, indicou que a rentabilidade financeira das aplicações à medida que aumenta, apresenta melhores resultados contra falências que acontecem no médio e longo prazo.

Por fim, ressalta-se que avaliações da solvência de entidades securitárias está na agenda regulatória mundial. Para além do acordo Solvência II, há a previsão de que as novas normas contábeis internacionais (IFRS17) para o setor comecem a vigorar a partir de 2023. Por simplificação, neste estudo levou-se em consideração apenas a distribuição exponencial de severidade individual, bem como não foi considerado o efeito da contratação de resseguro, constituindo-se na principal limitação do trabalho. Para pesquisas futuras, sugere-se que seja verificado os resultados considerando o efeito conjunto da adoção de resseguro com a rentabilidade financeira.

REFERÊNCIAS

- Areias, C. A. C., & Carvalho, J. V. F. (2021). Reinsurance in the Supplementary Health: A Counterfactual Study on the Impacts of Reinsurance Treaties Adoption by Healthcare Plans Operators in Brazil. *Brazilian Business Review*, 18(2), 217–235. <https://doi.org/10.15728/bbr.2021.18.2.6>
- Badaoui, M., & Fernández, B. (2013). An optimal investment strategy with maximal risk aversion and its ruin probability in the presence of stochastic volatility on investments. *Insurance: Mathematics and Economics*, 53(1), 1–13. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.04.002>
- Baumgartner, B., & Gatto, R. (2010). A Bootstrap Test for the Probability of Ruin in the Compound Poisson Risk Process. *ASTIN Bulletin*, 40(1), 241–255. <https://doi.org/10.2143/AST.40.1.2049227>
- Bohman, H. (1971). The ruin probability in a special case. *ASTIN Bulletin*, 6(1), 66–68. <https://doi.org/10.1017/S0515036100008254>
- Bowers, N. L. J., Hans U. Gerber, Hickman, J. C., Jones, D. A., & Nesbitt, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics*. By Newton L. Bowers, Jr., Hans U. Gerber, James C. Hickman, Donald A. Jones, Cecil J. Nesbitt. *The American Mathematical Monthly* (Vol. 93). The Society Of Actuaries. <https://doi.org/10.1080/00029890.1986.11971867>
- Cramér, H. (1930). On the Mathematical Theory of Risk. *Skandia Jubilee Volume, Stockholm*.
- De Vylder, F., & Goovaerts, M. J. (1988). Recursive calculation of finite-time ruin probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 7(1), 1–7. [https://doi.org/10.1016/0167-6687\(88\)90089-3](https://doi.org/10.1016/0167-6687(88)90089-3)
- Dickson, D.C. M., & Waters, H. R. (1991). Recursive calculation survival probabilities. *Astin Bulletin*, 21, 199–221.

- Dickson, David C. M., & Qazvini, M. (2016). Gerber–Shiu analysis of a risk model with capital injections. *European Actuarial Journal*, 6(2), 409–440. <https://doi.org/10.1007/s13385-016-0131-1>
- Dong, Y., & Wang, D. (2018). Uniform asymptotics for ruin probabilities in a two-dimensional nonstandard renewal risk model with stochastic returns. *Journal of Inequalities and Applications*, 2018(1), 319. <https://doi.org/10.1186/s13660-018-1913-6>
- Dufresne, F., & Gerber, H. U. (1989). Three Methods to Calculate the Probability of Ruin. *ASTIN Bulletin*, 19(1), 71–90. <https://doi.org/10.2143/ast.19.1.2014916>
- Euphasio Junior, J. W., & Carvalho, J. V. F. (2022). Reinsurance and Solvency Capital: Mitigating Insurance Companies' Ruin Probability. *Revista de Administração Contemporânea*, 26(1). <https://doi.org/10.1590/1982-7849rac2022200191.en>
- Feduzi, A., Runde, J., & Zappia, C. (2012). De Finetti on the insurance of risks and uncertainties. *British Journal for the Philosophy of Science*, 63(2), 329–356. <https://doi.org/10.1093/bjps/axr028>
- Fernández, B., Hernández-Hernández, D., Meda, A., & Saavedra, P. (2008). An optimal investment strategy with maximal risk aversion and its ruin probability. *Mathematical Methods of Operations Research*, 68(1), 159–179. <https://doi.org/10.1007/s00186-007-0191-8>
- Gatto, R. (2020). The stability of the probability of ruin. *Stochastic Models*, 36(1), 112–133. <https://doi.org/10.1080/15326349.2019.1695135>
- Gatto, R., & Mosimann, M. (2012). Four approaches to compute the probability of ruin in the compound Poisson risk process with diffusion. *Mathematical and Computer Modelling*, 55(3–4), 1169–1185. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.09.041>
- Goovaerts, B. Y. M., & Vyllder, F. D. E. (1984). A stable recursive algorithm for evaluation of ultimate ruin probabilities, 14(1), 53–59. <https://doi.org/10.1017/S0515036100004803>
- Hipp, C., Plum, M. (2000). Optimal investment for investors. *Insurance: Mathematics and Economics*, 27, 215–228.
- Hu, X., & Zhang, L. (2016). Ruin probability in a correlated aggregate claims model with common Poisson shocks application to Reinsurance. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 18(3), 675–689.
- Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J., & Denuit, M. (2002). *Modern Actuarial Risk Theory*. (Springer, Ed.), *Modern Actuarial Risk Theory* (Second Edi). <https://doi.org/10.1007/b109818>
- Kasumo, C., Kasozi, J., & Kuznetsov, D. (2018). On Minimizing the Ultimate Ruin Probability of an Insurer by Reinsurance. *Hindawi Journal of Applied Mathematics*, 2018(XI). <https://doi.org/10.1155/2018/9180780>
- Lundberg, F. O. (1903). Approximations of the Probability Function/Reinsurance of ColletiveRisks. *Almqvist and Wiksell*.
- Panjer, H. H. (1981). Recursive evaluation of a family of compound distributions. *ASTIN Bulletin*, 12, 22–26. <https://doi.org/10.1017/S0515036100006796>
- Sá, M., Maciel Júnior, J., & Reinaldo, L. (2017). Processo de Ruína Finito: um Estudo de Caso na Saúde Suplementar no Brasil. *REVISTA EVIDENCIAÇÃO CONTÁBIL & FINANÇAS*, 5(2), 88–103. <https://doi.org/10.18405/20170206>
- Sobrinho, C. V. T. (2009). *Ruína e Resseguro: modelos contínuos e suas aproximações*. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- Tamturk, M., & Utev, S. (2018). Ruin probability via Quantum Mechanics Approach. *Insurance: Mathematics and Economics*, 79, 69–74. <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2017.12.009>
- Wikstad, N. (1971). Exemplification of ruin probabilities. *ASTIN Bulletin*, 6(2), 147–152. <https://doi.org/10.1017/S0515036100010874>
- Xu, L., Wang, M., & Zhang, B. (2018). Minimizing Lundberg inequality for ruin probability under correlated risk model by investment and reinsurance. *Journal of Inequalities and Applications*, 2018:244. <https://doi.org/10.1186/s13660-018-1838-0>

ⁱ Disponível em:

<http://www.susep.gov.br/menuestatistica/SES/relat-acomp-mercado-2020.pdf>

ⁱⁱ A íntegra do documento oficial, inclusive em língua portuguesa, está disponível em: <https://eiopa.europa.eu/regulation-supervision/insurance/solvency-ii>

ⁱⁱⁱ Disponível em:

<http://www2.susep.gov.br/bibliotecaweb/docOriginal.aspx?tipo=1&codigo=35542>

^{iv} Disponível em:

https://www.bcb.gov.br/pre/normativos/busca/downloadNormativo.asp?arquivo=/Lists/Normativos/Attachments/50102/Res_4444_v6_L.pdf