

“ANÁLISE MULTIFRACTAL DO IBOVESPA: DINÂMICAS DE PREÇO, VOLUME  
NEGOCIADO E EFICIÊNCIA DE MERCADO”<sup>1</sup>

“MULTIFRACTAL ANALYSIS OF IBOVESPA: PRICE DYNAMICS, TRADED  
VOLUME AND MARKET EFFICIENCY”

**Alexandra Kelly de Moraes**

Doutoranda em Administração (UFLA)

Universidade Federal de Lavras (UFLA)

[akmoraes.am@gmail.com](mailto:akmoraes.am@gmail.com)

**Paulo Sérgio Ceretta**

Doutor em Engenharia de Produção (UFSC)

Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)

[paulo.ceretta@ufsm.br](mailto:paulo.ceretta@ufsm.br)

**Luiz Gonzaga Castro Júnior**

Doutor em Economia (USP)

Universidade Federal de Lavras (UFLA)

[lgcastro@ufla.br](mailto:lgcastro@ufla.br)

## RESUMO

**Objetivo:** Este estudo investiga as flutuações de preço, volume negociado e correlação cruzada do Ibovespa por meio de métodos multifractais, buscando compreender as dinâmicas do mercado financeiro brasileiro e fornecer suporte para decisões financeiras mais informadas.

**Fundamento:** A pesquisa se baseia na literatura sobre análise multifractal, que tem demonstrado eficácia na investigação de flutuações de preços em mercados financeiros. O estudo amplia essa abordagem ao integrar a análise de preços e volumes no contexto do mercado brasileiro, uma perspectiva ainda pouco explorada.

**Método:** Foram empregados os métodos de Análise de Flutuação Destendenciada Multifractal (MF-DFA) e Análise de Correlação Cruzada Multifractal (MF-DCCA) para examinar séries temporais do Ibovespa em reais e dólares, compreendendo o período de 4 de janeiro de 2010 a 1 de setembro de 2022, totalizando 3.137 observações.

**Resultados:** A análise revelou características multifractais nas séries diárias, com flutuações tanto anti-persistentes quanto persistentes, refletindo a complexidade do mercado financeiro brasileiro. Durante períodos críticos, como a recessão provocada pela pandemia da Covid-19, observou-se um aumento significativo na volatilidade e no volume negociado, sugerindo respostas emocionais dos

<sup>1</sup> Artigo recebido em: 16/05/2024. Revisado por pares em: 14/01/2025. Reformulado em: 07/02/2025. Recomendado para publicação: 14/01/2025 por Marco Aurélio dos Santos (Editor Adjunto). Publicado em: 03/03/2025. Organização responsável pelo periódico: UFPB

investidores. Além disso, a persistência nas tendências de preço e volume aponta para um comportamento com memória de longo prazo, mesmo em cenários de instabilidade global.

**Contribuições:** O estudo oferece uma contribuição significativa ao aplicar métodos multifractal para analisar a complexidade do mercado financeiro brasileiro. Os achados destacam o volume negociado como uma importante fonte de informação para decisões financeiras e reforçam a necessidade de estratégias adaptativas em cenários de alta volatilidade, como os provocados pela recessão da Covid-19.

**Palavras-Chave:** Flutuação do preço. Flutuação do volume negociado. Correlação cruzada do preço-volume. Ibovespa. Multifractal.

## ABSTRACT

**Objective:** This study investigates price fluctuations, trading volume, and cross-correlation of the Ibovespa through multifractal methods, aiming to understand the dynamics of the Brazilian financial market and provide support for more informed financial decisions.

**Background:** The research is based on the literature on multifractal analysis, which has proven effective in investigating price fluctuations in financial markets. This study expands the approach by integrating the analysis of prices and trading volumes in the Brazilian market context, a perspective that remains underexplored.

**Method:** The Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MF-DFA) and Multifractal Detrended Cross-Correlation Analysis (MF-DCCA) methods were applied to examine time series data for the Ibovespa in Brazilian reais and US dollars, covering the period from January 4, 2010, to September 1, 2022, totaling 3,137 observations.

**Results:** The analysis revealed multifractal characteristics in the daily series, with both anti-persistent and persistent fluctuations, reflecting the complexity of the Brazilian financial market. During critical periods, such as the recession caused by the Covid-19 pandemic, there was a significant increase in volatility and trading volume, suggesting emotional responses from investors. Moreover, the persistence in price and volume trends indicates long-term memory behavior, even under conditions of global instability.

**Contributions:** This study offers a significant contribution by applying multifractal methods to analyze the complexity of the Brazilian financial market. The findings highlight trading volume as a valuable source of information for financial decision-making and reinforce the need for adaptive strategies in highly volatile scenarios, such as those triggered by the Covid-19 recession.

**Keywords:** Price fluctuation. Traded volume fluctuation. Price-volume cross-correlation. Ibovespa. Multifractal.

## 1. INTRODUÇÃO

Os recentes choques globais, como a pandemia da Covid-19 e o conflito geopolítico entre Rússia e Ucrânia, têm desafiado a estabilidade econômica mundial. Esses eventos intensificaram incertezas nos mercados financeiros, resultando em impactos significativos nas políticas fiscais, nas taxas de inflação e no comportamento dos investidores (Ipea, 2022; Monge, 2022; Worldbank, 2022). Embora esses cenários tenham sido amplamente investigados, há uma crescente necessidade de compreender como tais eventos afetam a dinâmica do mercado, especialmente em mercados emergentes, onde fatores como liquidez e volatilidade desempenham papéis cruciais na formação dos preços.

Dentro do mercado financeiro, o preço e o volume de negociação se destacam como variáveis-chave para análise. O preço é frequentemente utilizado para capturar a reação do mercado a novas informações, enquanto o volume negociado reflete a percepção dos investidores sobre o valor

do mercado e a assimilação dessas informações (Beaver, 1968; Stošić et al., 2019). Apesar de a literatura já ter estabelecido a importância dessas variáveis, a relação entre preço e volume negociado ainda permanece subexplorada, especialmente em mercados de capitais com estruturas e dinâmicas complexas, como o brasileiro. Essa lacuna é ainda mais evidente em contextos de choques externos, nos quais a interação entre essas variáveis pode fornecer informações valiosas sobre a eficiência e a microestrutura do mercado (Tauchen & Pitts, 1983; Hasan & Salim, 2017).

Uma abordagem promissora para entender a complexidade dessas relações é a aplicação de métodos multifractais, que permitem identificar propriedades dinâmicas e escaláveis em séries temporais financeiras (Kristoufek & Vosvrda, 2013; Patil & Rastogi, 2020). Essas técnicas, como a Análise de Flutuação sem Tendência Multifractal (MF-DFA) e a Análise Multifractal de Correlação Cruzada (MF-DCCA), têm sido amplamente utilizadas para investigar flutuações financeiras, memória longa e correlações cruzadas em mercados de ações globais (Ruan et al., 2016; Mensi et al., 2021). No entanto, sua aplicação em mercados emergentes, particularmente no Brasil, ainda é limitada.

Esse estudo se baseia na hipótese de mercado fractal, que sugere que os mercados financeiros não seguem um comportamento linear ou simples, mas sim dinâmicas complexas que podem ser descritas por auto-similaridade em diferentes escalas de tempo (Patil & Rastogi, 2020). Essa característica é explorada por meio de métodos multifractais, que capturam padrões que se repetem em várias escalas, revelando propriedades subjacentes do mercado que são difíceis de detectar com técnicas convencionais (Stošić et al., 2015; Hasan; Salim, 2017). Essa abordagem é relevante, especialmente em mercados emergentes, onde as flutuações e os padrões de preço podem ser mais difíceis de modelar (Mandelbrot, 1999; Patil & Rastogi, 2019).

Além disso, este estudo também se relaciona com a hipótese eficiente do mercado (EMH), que postula que os preços dos ativos financeiros refletem todas as informações disponíveis, tornando impossível obter retornos anormais de forma consistente (Fama, 1970). A EMH sugere que, em um mercado eficiente, os preços se ajustam rapidamente a novas informações, de modo que não há espaço para prever as flutuações de preços de maneira sistemática (Moraes et al., 2024). No entanto, a aplicação de métodos multifractais pode desafiar essa ideia, ao revelar padrões não lineares e persistentes nas séries temporais, sugerindo que os mercados podem não ser completamente eficientes, especialmente em momentos de volatilidade extrema e choques globais (Patil & Rastogi, 2020).

Este estudo busca preencher a lacuna existente ao investigar as flutuações do preço, do volume negociado e a correlação cruzada entre essas variáveis no índice Ibovespa, utilizando a combinação dos métodos Análise de Flutuação sem Tendência Multifractal (MF-DFA) e Análise Multifractal de Correlação Cruzada (MF-DCCA). O período de análise, de 2010 a 2022, engloba eventos econômicos globais relevantes, como a crise da dívida europeia, a recessão brasileira, a pandemia e o conflito entre Rússia e Ucrânia, permitindo avaliar como choques externos influenciam a dinâmica do mercado brasileiro.

A principal contribuição deste trabalho é fornecer uma análise empírica inédita sobre a relação entre preço e volume no mercado financeiro brasileiro, especificamente no índice Ibovespa. Este estudo investiga como os choques externos afetam a eficiência e a microestrutura do mercado, ao mesmo tempo que explora as flutuações entre preço e volume como reflexo de dinâmicas de mercado complexas em tempos de crises globais. A aplicação das técnicas multifractais, como a MF-DFA e a MF-DCCA, permite identificar padrões de longo prazo e interações não lineares, oferecendo uma visão mais aprofundada da dinâmica do mercado brasileiro. Ao integrar essas ferramentas, o trabalho contribui para o estudo da eficiência em mercados emergentes, fornecendo evidências valiosas para acadêmicos, investidores e formuladores de políticas econômicas.

O artigo está organizado em cinco seções adicionais. A seção dois apresenta uma revisão da literatura sobre análise multifractal e sua aplicação em mercados financeiros. A seção três descreve

os dados utilizados e os métodos MF-DFA e MF-DCCA. Os resultados empíricos são discutidos na seção quatro, enquanto as considerações finais são abordadas na seção cinco.

## 2. REVISÃO EMPÍRICA SOBRE ANÁLISE MULTIFRACTUAL: ABORDAGENS E APLICAÇÕES

A análise multifractal tem se consolidado como uma ferramenta poderosa para explorar as complexidades dos mercados financeiros, incluindo ações, *commodities* e criptomoedas. Esse método é eficaz para identificar padrões persistentes e anti-persistentes, além de flutuações de curto e longo prazo em séries temporais (Patil & Rastogi, 2020). Em finanças, as abordagens multifractais têm sido amplamente utilizadas para investigar a memória longa e avaliar a eficiência dos mercados, ajudando a entender como os mercados assimilam novas informações sob diferentes condições, como choques econômicos globais (Mandelbrot, 1999; El Alaoui, 2017).

A teoria fractal sugere que os mercados financeiros exibem auto-similaridade em diferentes escalas de tempo, o que significa que, independentemente do horizonte temporal (seja minutos, dias ou anos), as flutuações de preço e volume no mercado seguem padrões semelhantes (Mandelbrot, 1999). A análise multifractal, ao aplicar técnicas como MF-DFA e MF-DCCA, busca capturar essa auto-similaridade, identificando a complexidade nas séries temporais dos mercados financeiros (Patil & Rastogi, 2020). De acordo com a teoria fractal, mercados eficientes não são necessariamente mercados aleatórios, mas sim sistemas que exibem características de longo alcance de correlação e dependência temporal (Patil & Rastogi, 2019). Através dessas técnicas, é possível observar como essas características multifractais se manifestam, revelando a presença de memória longa ou volatilidade persistente, o que pode ser interpretado como uma ineficiência do mercado (Ruan, Cui & Fan, 2020).

A teoria multifractal vai além das abordagens monofractais, como a de Kukacka e Kristoufek (2020) e Guo et al. (2021), que analisam o comportamento das séries financeiras com um único expoente. Em contraste, a teoria multifractal reconhece múltiplas escalas de flutuação, proporcionando uma visão mais detalhada das dinâmicas complexas que caracterizam os mercados financeiros (Ruan et al., 2016; Patil & Rastogi, 2020). Essa característica torna a análise multifractal valiosa para estudar os padrões de preço e volume de negociação em mercados financeiros com estruturas complexas, com ênfase na EHM.

A Hipótese de Mercado Eficiente (EMH), proposta por Fama (1970), sugere que os preços dos ativos financeiros refletem todas as informações disponíveis, e, portanto, os preços se movem de forma aleatória e não seguem padrões previsíveis. De acordo com a EMH, os mercados são eficientes, o que implica que não há possibilidade de gerar retornos anormais de forma sistemática, pois as flutuações de preço seriam aleatórias (Moraes *et al.*, 2024). No entanto, quando se observa um comportamento multifractal nas séries temporais, como memória longa e correlação de longo alcance, isso pode ser interpretado como um indício de ineficiência do mercado. Em mercados ineficientes, os preços não reagem de maneira aleatória e rápida a todas as informações disponíveis, o que resulta em flutuações persistentes e complexas (Lo, 2004). A análise multifractal, portanto, fornece uma ferramenta poderosa para avaliar a eficiência dos mercados ao examinar a estrutura temporal das flutuações de preços e volumes.

No mercado de ações, a análise multifractal tem sido crucial para investigar a eficiência dos mercados e a memória longa. Por exemplo, Kristoufek e Vosvrda (2013) estudaram a dimensão fractal e a dependência temporal de 41 índices globais, encontrando que mercados asiáticos e europeus apresentavam maior eficiência, enquanto mercados locais apresentavam ineficiências influenciadas por fatores como o comportamento de manada. Stošić et al. (2015) analisaram a autocorrelação e a correlação cruzada entre preço e volume em 13 índices globais e observaram que as séries de preços exibiam maior complexidade do que as de volume negociado. Outros estudos, como o de Hasan e

Salim (2017), que usaram MF-DFA e MF-DCCA para investigar o Nifty Index na Índia, revelaram que os preços exibem ausência de autocorrelação, enquanto o volume de negociação apresenta um comportamento anti-persistente. Esses estudos destacam a eficácia dos métodos multifractal para compreender as ineficiências e dinâmicas estruturais dos mercados acionários.

No Brasil, a aplicação dessas técnicas é particularmente relevante devido às características do Ibovespa, que inclui alta volatilidade, forte dependência de commodities e alta sensibilidade a choques externos, como crises globais e eventos políticos locais. Em momentos de instabilidade, como a pandemia da Covid-19 e o conflito entre Rússia e Ucrânia, o uso de técnicas como o MF-DFA e MF-DCCA pode revelar como as flutuações de preço e volume negociado interagem e fornecem uma compreensão mais profunda sobre a eficiência do mercado e a adaptação a choques externos.

Em relação às *commodities*, a análise multifractal tem sido uma ferramenta importante para entender as flutuações de preços em mercados sensíveis a choques externos, como variações na oferta e demanda. Por exemplo, Ruan et al. (2016) analisaram a relação entre o preço do petróleo bruto e o *Baltic Dry Index* (BDI) por meio do MF-DCCA, observando características persistentes e anti-persistentes em diferentes escalas temporais. Ruan, Cui e Fan (2020) aplicaram essa abordagem para estudar *commodities* na China, identificando correlações multifractais e destacando o impacto das flutuações nos retornos dos mercados. Embora o Ibovespa não seja uma *commodity*, ele é fortemente influenciado por commodities como petróleo, minério de ferro e soja, dada a composição de suas empresas. Isso reforça a importância de analisar as flutuações de preço e volume no contexto multifractal, considerando a interdependência entre os setores e os efeitos de choques externos.

O mercado de criptomoedas também tem sido objeto de estudo usando métodos multifractais, especialmente devido à sua alta volatilidade e complexidade. Stošić et al. (2019) investigaram as mudanças diárias nos preços e volumes de 50 criptomoedas e encontraram que as séries de preços apresentam maior complexidade que as séries de volume. Outros estudos, como o de Khuntia e Pattanayak (2018), aplicaram a Hipótese de Mercado Adaptativo (HMA) para examinar a previsibilidade dos retornos de bitcoin, mostrando que a eficiência do mercado evolui ao longo do tempo. Embora as criptomoedas tenham características distintas, suas dinâmicas de alta volatilidade oferecem evidências relevantes que podem ser aplicadas ao mercado brasileiro.

Portanto, a revisão da literatura destaca a importância dos métodos multifractais para investigar o comportamento de mercados financeiros, como ações, *commodities* e criptomoedas (ver Quadro 1), especialmente em contextos de choques globais. No caso do Ibovespa, essas técnicas proporcionam uma análise detalhada das flutuações de preço e volume, permitindo compreender como eventos globais e locais, como a pandemia da Covid-19 e o conflito Rússia-Ucrânia, afetam a eficiência e a dinâmica do mercado. Este estudo expande a literatura existente ao explorar as características multifractais do Ibovespa, oferecendo novos achados sobre as interações entre preço, volume e a eficiência do mercado brasileiro em um ambiente de alta volatilidade.

Alem disso, o Quadro 1 sintetiza os principais estudos sobre a eficiência de mercado por meio da análise multifractal, destacando suas abordagens, contextos e contribuições para a compreensão das dinâmicas dos mercados financeiros. A análise empírica desses estudos, revelam que a eficiência dos mercados é influenciada por fatores como crises financeiras, eventos políticos e mudanças nas políticas econômicas, com a aplicação de metodologias multifractais mostrando padrões complexos de correlação, como persistência no curto prazo e antipersistência no longo prazo. Esses estudos oferecem evidências interessantes para o gerenciamento de risco e a formulação de estratégias de investimento.

Quadro 1 - Estudos sobre Eficiência de Mercado e Análise Multifractal

Autores (Ano)	Objetivo	Tipo de Mercado	Ativo	Período	Principais Resultados
Memon et al. (2023)	Examinaram a eficiência de mercados em <i>commodities</i> de energia limpa.	Futuro	Energia Limpa	2010 –2021	Análise da eficiência e comportamento de rebanho nos mercados de energia limpa, destacando maior multifractalidade e impacto na eficiência durante a pandemia, com implicações para o gerenciamento de riscos e portfólios.
Mensi, Vo e Kang (2022)	Estudaram a eficiência nos mercados futuros de metais.	Futuro	Metais	2014 –2020	Análise da multifractalidade e eficiência nos mercados de metais preciosos e industriais, destacando comportamentos distintos entre ouro e prata e ineficiências durante crises financeiras.
Memon, Yao e Naveed (2022)	Examinaram o nível de eficiência nos mercados das <i>commodities</i> .	Futuro	Energia, Metais e Agrícola	2009 –2017	O estudo mostra que crises impactam a eficiência dos mercados e identifica ouro e prata como bons instrumentos de <i>hedge</i> .
Ali et al. (2021)	Investigaram os mercados de petróleo e sua eficiência.	<i>Spot</i>	Petróleo	1996 –2018	Os preços do petróleo Brent são fracamente eficientes e amplamente imprevisíveis, com resultados robustos em diferentes frequências e <i>benchmarks</i> .
David et al. (2020)	Examinaram a eficiência de mercado das <i>commodities</i> energéticas brasileiras.	Futuro/ <i>Spot</i>	Etanol e Gasolina	2011 –2015	Evidência de maior eficiência no mercado de gasolina e avanço sutil no mercado de etanol após mudanças na política de combustíveis no Brasil, com os índices H e D sendo úteis para análise de dinâmica de preços e criação da medida IE.
Mensi et al. (2020)	Analisaram a eficiência informacional em <i>commodities</i> .	Futuro	Ouro e Petróleo Brent	2018 –2019	Os mercados de ouro e petróleo mostram ineficiência, especialmente durante a pandemia, com eficiência sensível a escalas, tendências e ao sentimento do investidor.
Ruan, Cui e Fan (2020)	Identificaram correlações multifractais nos retornos das <i>commodities</i> .	Futuro	Agrícola	2006 –2017	Os retornos futuros de soja, farelo de soja e óleo de soja exibem correlação cruzada de lei de potência e características multifractais significativas, impulsionadas por correlações de longo alcance e distribuição de cauda gorda.
Stošić et al. (2019)	Estudaram a análise de preço e volume em criptomoedas.	Futuro	Criptomoedas	2013 –2017	As mudanças de preço são mais complexas, com grandes flutuações dominando os preços e pequenas flutuações dominando os volumes. As mudanças de preço não têm correlações, enquanto os volumes exibem correlações antipersistentes de longo prazo.
Khuntia e Pattanayak (2018)	Estudaram a evolução da eficiência de mercado no Bitcoin.	Futuro	Bitcoin	2010 –2017	A eficiência do mercado evoluiu ao longo do tempo, corroborando a validação da Hipótese de Mercados Adaptativos (AMH) no mercado de Bitcoin.
Hasan e Salim (2017)	Estudaram a eficiência no mercado indiano utilizando análise multifractal.	Futuro	Índices de ações	2002 –2014	As mudanças de preço mostram ausência de correlação e alta complexidade, enquanto mudanças de volume e correlações cruzadas entre preço e volume exibem correlações multifractais antipersistentes de longo alcance e menor complexidade.

Ruan et al. (2016)	Analisaram a relação entre preço do petróleo e o Baltic Dry Index (BDI).	Futuro	Índices de ações	1988–2015	As correlações cruzadas entre BDI e preços do petróleo são fortemente persistentes no curto prazo e fracamente antipersistentes no longo prazo. A multifractalidade dessas correlações é atribuída à persistência das flutuações e distribuições de cauda gorda.
Khediri e Charfeddine (2015)	Examinaram a hipótese de mercado eficiente dos mercados de energia.	Futuro/Spot	Petróleo e Gasolina	1983–2014	Evidência de eficiência de mercado variável no tempo, com rápida reversão à média, influenciada por condições econômicas e políticas. Mercados de petróleo bruto e RBOB regular são os mais eficientes, enquanto o propano é o menos eficiente.
Stošić et al. (2015)	Analisaram a autocorrelação e correlação cruzada entre preço e volume em mercados globais.	Futuro	Índices de ações	2006–2014	As mudanças de preços apresentam maior complexidade multifractal do que as mudanças de volume, com grandes flutuações dominando os preços e pequenas flutuações dominando os volumes. Há ausência de correlações nas mudanças de preços, mas correlações antipersistentes de longo prazo em volumes e entre preço e volume.
Jiang, Xie e Zhou (2014)	Analisaram a eficiência dos mercados de energia.	Futuro	Petróleo WTI	1983–2012	O mercado futuro de petróleo bruto é eficiente no período total, mas eventos turbulentos, como a Guerra do Golfo e quedas de preços, reduzem a eficiência. A eficiência varia conforme os eventos econômicos e políticos.
Kristoufek e Vosvrda (2013)	Examinaram a eficiência de mercados globais e suas características fractais.	Futuro	Índices de ações	2000–2011	Mercados europeus são os mais eficientes, enquanto América Latina, Ásia e Oceânia apresentam maior ineficiência, impulsionada por pastoreio local e baixa dimensão fractal.

Fonte: Elaborado pelos autores.

### 3. DADOS DA PESQUISA E METODOLOGIA

Esta seção é composta por três partes. Primeiramente, apresenta-se os dados da pesquisa, seguido pela descrição dos métodos de Análise de Flutuação Destendenciada Multifractal (MF-DFA) proposto por Kantelhardt et al. (2002) e Análise de Correlação Cruzada Multifractal (MF-DCCA) desenvolvida por Podobnik e Stanley (2008).

#### 3.1 Dados da pesquisa

O foco deste artigo é examinar a presença de memória de longo prazo no mercado de capitais do Brasil, seguindo a metodologia do estudo de Patil e Rastogi (2020). A amostra deste estudo é composta pelos dados de preço e volume do Índice da Bolsa de Valores de São Paulo (Ibovespa). Todas as séries diárias estão expressas em moeda real e dólar americano, obtidas da fonte Economatica. O período analisado compreende o intervalo de 4 de janeiro de 2010 até 1 de setembro de 2022, totalizando 3137 observações ao longo do tempo. A escolha do Ibovespa como indicador se justifica pelo seu papel como referência para o desempenho das ações negociadas na B3, que reúne as empresas mais relevantes do mercado de capitais brasileiro.

O mercado de capitais brasileiro apresenta características próprias que justificam a aplicação dos métodos descritos neste estudo. A volatilidade do Ibovespa, historicamente influenciada por fatores internos, como questões políticas e econômicas, além da forte correlação com mercados

internacionais, oferece um campo fértil para a investigação de memória de longo prazo e características multifractais (B3, 2025). A inclusão de séries em moeda real e dólar americano permite uma análise mais abrangente, considerando o impacto das variações cambiais, que é uma característica marcante para investidores locais e internacionais. Além disso, o mercado brasileiro é composto por investidores institucionais e pessoas físicas com comportamentos distintos em relação ao horizonte de investimento e padrões de negociação (B3, 2005), o que pode amplificar a presença de dependências não lineares e multifractais nas séries de preço e volume.

### 3.2 Análise de Flutuação Destendeciada Multifractal (MF-DFA)

O método Análise de Flutuação Destendeciada Multifractal (MF-DFA) foi introduzido por Kantelhardt et al. (2002) para quantificar as correlações de longo alcance em séries temporais multifractais não estacionárias. Neste estudo, o MF-DFA é utilizado para medir o nível de dependência entre as séries de preço e volume do índice da B3 (Kantelhardt et al., 2002).

O MF-DFA descrever as características fractais de série temporal  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), onde  $N$  refere-se à duração da série (Kantelhardt et al., 2002). O método envolve o cálculo dos resíduos de tendência de uma série temporal do tipo passeio aleatório, divididos em segmentos de mesmo tamanho, sem sobreposição entre elas (Patil & Rastogi, 2020). Em cada segmento, é estimado a raiz quadrada da média desses resíduos, denominada como a função de flutuação de tendência local (Patil & Rastogi, 2020). A relação entre o tamanho do segmento e a função de flutuação segue uma lei de potência (Patil & Rastogi, 2020).

Essa relação entre o tamanho do segmento e a função de flutuação, regida pela lei de potência, é capturada pelo expoente de *Hurst* (Kantelhardt et al., 2002). A estimativa do expoente de *Hurst*  $h(q)$  é uma medida que constrói um espectro multifractal (Kantelhardt et al., 2002; Peng et al., 1995; Jiang et al., 2019). Segundo Patil e Rastogi (2020), o método MF-DFA, consiste em cinco etapas:

1. O cálculo dos resíduos sem tendência: Os resíduos  $\varepsilon(i)$  são calculados subtraindo o valor observado  $X_i$  do valor estimado  $\hat{X}$  para cada ponto na série temporal.

$$\varepsilon(i) = X_i - (\hat{X})$$

2. O cálculo da função de flutuação com o RMS (*Root Mean Square*, ou Raiz Quadrada da Média) dos resíduos sem tendência. O RMS é definido como a raiz quadrada da média dos quadrados dos resíduos, permitindo uma quantificação precisa da magnitude média das flutuações ao longo da série temporal (Kantelhardt et al., 2002). Essa medida é comumente aplicada em análises multifractais devido à sua robustez para capturar oscilações tanto pequenas quanto grandes, proporcionando uma avaliação mais detalhada da estrutura temporal das séries (Patil & Rastogi, 2020). A função de flutuação  $[F_v(s)]^2$  representa a variabilidade dos resíduos sem tendência em cada segmento de tamanho  $s$ .

$$[F_v(s)]^2 = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s [\varepsilon((v-1)s + j)]^2$$

3. A ordem  $q^{th}$  da função de flutuação é calculada para um dado valor de  $q$ : Para um valor específico de  $q$ , a função de flutuação de ordem  $q$  é calculada considerando a potência  $q$  dos resíduos em cada segmento.

$$[F_v(s)]^q = \frac{1}{s} \sum_{j=1}^s [\varepsilon((v-1)s + j)]^q$$

4. Relação lei de potência: A relação entre a função de flutuação e o tamanho do segmento segue a lei de potência, onde a função de flutuação é proporcional a  $S$  elevado ao expoente  $h(q)$  para um dado valor de  $q$ .

$$F_q(S) \sim S^{h(q)}$$

5. Cálculo do espectro de singularidade  $f(\alpha)$  e dimensão fractal: O espectro de singularidade  $f(\alpha)$  descreve a dimensão fractal dos multifractais em termos da força da singularidade  $\alpha$ . A dimensão fractal  $f(\alpha)$  é calculada como  $q\alpha$  menos  $\tau(q)$ , onde  $\tau(q)$  está relacionado ao expoente de Hurst generalizado  $H(q)$ .

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= q\alpha - \tau(q) \\ H(q) &= \lim_{q' \rightarrow q} \left[ \frac{\tau(q') + 1}{q'} \right] \\ \tau(q) &= q * h(q) - 1 \end{aligned}$$

Essas equações detalham o processo de cálculo das características multifractais de séries temporais utilizando o método MF-DFA. A aplicação do MF-DFA ao mercado brasileiro é particularmente relevante devido à natureza não estacionária dos dados financeiros do país (Patil & Rastogi, 2020). Fatores como altas taxas de juros, volatilidade cambial e eventos econômicos domésticos frequentemente geram flutuações significativas nos preços e volumes das ações (B3, 2025). O uso do MF-DFA permite identificar e quantificar a presença de dependências temporais de longo prazo e padrões multifractais nessas séries, proporcionando insights sobre a dinâmica do mercado. Para investidores locais, a análise dessas características pode oferecer informações essenciais para estratégias de diversificação e gerenciamento de riscos em um ambiente altamente dinâmico.

### 3.3 Análise de Correlação Cruzada Multifractal (MF-DCCA)

A Análise de Correlação Cruzada Multifractal (MF-DCCA) proposto por Podobnik e Stanley (2008) é um método que analisa a ligação entre séries de preço e volume, permitindo a avaliação desse comportamento em diferentes escalas de tempo. Neste método, os resíduos sem tendência de duas séries são divididos em segmentos de igual tamanho,  $S$  (Podobnik & Stanley, 2008; Jiang et al., 2019). Em cada segmento, é calculada a raiz quadrada média dos resíduos, cuja média é denominada correlação cruzada (Podobnik & Stanley, 2008; Jiang et al., 2019).

A ordem  $q^{th}$  da correlação cruzada segue a lei de potência (Podobnik & Stanley, 2008). A relação da lei de potência é capturada pelo expoente de Hurst e explicada por um espectro multifractal (Patil & Rastogi, 2020). As etapas para a correlação cruzada são calculadas de forma semelhante ao caso do MF-DFA (Jiang et al., 2019; Patil & Rastogi, 2020), e a função de flutuação é calculada usando a equação:

$$F_v^2(s) = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^s [X_v(k) - \widehat{X}_v(k)][Y_v(k) - \widehat{Y}_v(k)]$$

A ordem  $q^{th}$  da correlação cruzada entre as séries é calculada pela equação:

$$F_{xy}^2(q, s) = \left[ \frac{1}{m} \sum_{v=1}^m F_v^q(s) \right]^{\frac{1}{q}}$$

A relação de escala é expressa por:

$$F_{xy}(q, s) \sim H_{xy}(q)$$

Essas equações descrevem o cálculo da correlação cruzada multifractal entre séries de preço e volume, permitindo a análise da relação entre essas séries em diferentes escalas de tempo. O método MF-DCCA é fundamental para compreender a relação entre séries de preço e volume no contexto do mercado brasileiro, que frequentemente apresenta correlações complexas devido a eventos inesperados e intervenções econômicas. A B3, como principal bolsa de valores do país, registra uma ampla diversidade de ativos com padrões de negociação que refletem tanto a atuação de grandes players institucionais quanto de investidores individuais (B3, 2025). A avaliação das correlações cruzadas multifractais permite identificar comportamentos não triviais em diferentes escalas de tempo, evidenciando possíveis padrões de interação entre preço e volume. Essas informações são particularmente valiosas para investidores locais que buscam entender a dinâmica do mercado em cenários de alta volatilidade (Patil & Rastogi, 2020).

Todas as análises estatísticas foram realizadas utilizando o *software* R e a interface *RStudio*, devido à sua robustez e versatilidade para a manipulação de dados financeiros e séries temporais. A ampla disponibilidade de pacotes especializados no R facilitou a implementação dos métodos MF-DFA e MF-DCCA, garantindo precisão nos cálculos multifractais e a reprodutibilidade dos resultados. A escolha dessa ferramenta se justifica por sua capacidade de lidar com grandes volumes de dados e por ser amplamente reconhecida na pesquisa acadêmica em finanças quantitativas.

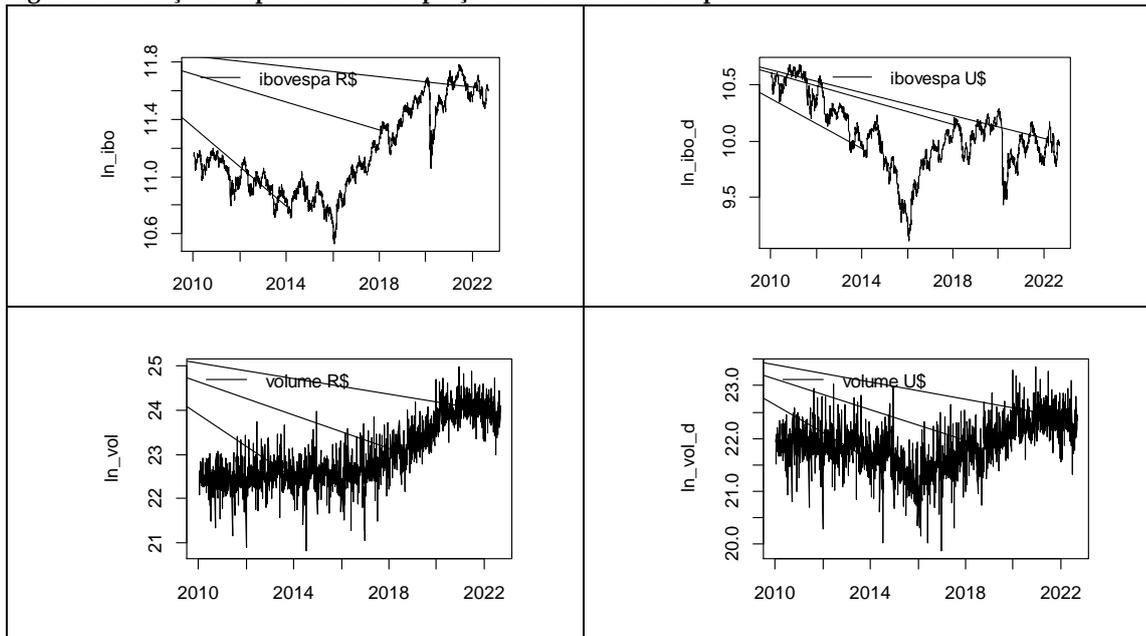
#### 4. ANÁLISE DOS RESULTADOS EMPÍRICOS: SÉRIES DE RETORNOS E ANÁLISE MULTIFRACTAL DO IBOVESPA

Nesta seção, serão apresentados os resultados da análise estatística descritiva das séries de retornos dos dados, seguidos pela realização da análise multifractal do Ibovespa.

##### 4.1 Análise Estatística Descritiva do Ibovespa

A Figura 1 apresenta a análise estatística descritiva do Ibovespa, mostrando os cálculos dos retornos logarítmicos diários das séries de preços e volumes negociados, tanto em reais (R\$) quanto em dólares americanos (US\$). Observa-se, na Figura 1, duas quedas significativas no preço do Ibovespa: a primeira, de R\$10,0 e U\$8,0 em 2015, e a segunda, de R\$11,0 e U\$9,5 em 2020. A volatilidade nos mercados financeiros internacionais foi notável, especialmente em 2020.

Figura 1. Evolução temporal diária de preço e volume do Ibovespa



Nota: Para cada uma das séries temporais (preço e volume), os retornos logarítmicos diários foram calculados utilizando a fórmula:  $r_t = \ln(P_t) - \ln(P_{t-1})$ , em que  $P_t$  representa o preço no dia  $t$ .

Fonte: Elaborado pelos autores a partir dos Dados da Pesquisa (2022).

Essas quedas em 2015 e 2020 podem ser atribuídas a diferentes fatores econômicos. Em 2015, o Ibovespa recuou 13,3%, refletindo a instabilidade nos mercados financeiros globais e encerrando o ano em 43.349 pontos. Quando avaliado em dólares, o Ibovespa registrou uma queda de 41% em 2015. O valor de mercado das empresas listadas na Ibovespa também caiu 14,8%, totalizando R\$1,9 trilhões ao final de dezembro. Acompanhando a tendência de retração do mercado, o volume diário negociado também recuou 4,9% no ano, totalizando R\$6,7 bilhões em dezembro (Boletim do Banco Central do Brasil, 2015).

Em março de 2020, a pandemia da Covid-19 provocou uma grande deterioração nos mercados financeiros, com o Ibovespa fechando em 73.020 pontos, representando uma queda de 2,17%. No ano seguinte, em 2021, o índice acumulou uma queda de 36,86% (Agência Brasil, 2020). Com base nesses dados, fica evidente que o mercado financeiro, representado pelo Ibovespa, experimentou dois períodos de queda acentuada, fortemente influenciados pela volatilidade nos mercados internacionais e pela crise global provocada pela pandemia.

A análise dos retornos do Ibovespa em reais e dólares, conforme mostrado na Figura 1, indica uma alta volatilidade nos retornos diários do índice ao longo do tempo. As quedas significativas observadas em 2015 e 2020 coincidem com períodos de instabilidade e incerteza no mercado financeiro. A volatilidade nos retornos diários do volume negociado também foi notável, especialmente em 2020, sugerindo que a crise da Covid-19 impactou tanto o volume de negociações quanto a liquidez do mercado.

Esses períodos de alta volatilidade e quedas abruptas do Ibovespa destacam a importância da gestão de riscos para investidores. Durante crises de grande volatilidade, como as observadas nesses anos, estratégias de *hedge* podem ser empregadas para minimizar perdas. Além disso, a diversificação de ativos é fundamental para proteger os portfólios contra quedas abruptas, especialmente em tempos de incerteza econômica global. Para os reguladores do mercado financeiro brasileiro, as quedas substanciais do Ibovespa em 2015 e 2020 indicam a necessidade de políticas que visem aumentar a liquidez do mercado em momentos de crise. Garantir a presença de mecanismos de estabilidade financeira é essencial para promover a confiança dos investidores e mitigar os efeitos de crises como a da Covid-19.

As quedas do Ibovespa em 2015 e 2020 podem ser explicadas por fatores macroeconômicos globais. Em 2015, o recuo foi impulsionado pela instabilidade nos mercados financeiros, incluindo a desaceleração da economia chinesa e uma crise fiscal interna no Brasil, resultando em uma queda significativa do índice, tanto em termos nominais quanto ajustado em dólares. Em 2020, o impacto da pandemia da Covid-19 gerou um cenário de incerteza e volatilidade nos mercados internacionais, com grandes perdas no Ibovespa, corroboradas por fontes confiáveis como o Boletim do Banco Central do Brasil (2015) e a Agência Brasil (2020). Esses dados são amplamente documentados, garantindo a precisão das informações apresentadas. Em síntese, a Figura 1 reflete a sensibilidade do mercado financeiro, representado pelo Ibovespa, a eventos econômicos e crises globais. Esse comportamento reforça a importância da análise de riscos e da diversificação de investimentos como estratégias para lidar com a volatilidade e os desafios do mercado.

Na sequência, a Tabela 1 apresenta a estatística descritiva das séries de retornos calculadas do Ibovespa em real (R\$) e em dólar americano (US\$). A tabela mostra os valores mínimos e máximos dos preços do Ibovespa em real e em dólar, que indicam momentos de queda acentuada e valorização do mercado. De maneira similar, os valores mínimos e máximos do volume negociado em ambas as moedas sugerem períodos de baixa liquidez e alta atividade de negociação. Esses dados são essenciais para uma análise mais aprofundada das variações de preço e da atividade do mercado financeiro.

**Tabela 1. Estatísticas descritivas de preço e volume do Ibovespa**

Estatísticas	Valores R\$		Valores US\$	
	Ibovespa (preço)	volume	Ibovespa (preço)	volume
Nº. obs.	3.137	3.137	3.137	3.137
Mínimo	-15,994	-151,722	-20,379	-149,608
Máximo	13,023	167,846	16,081	167,974
Significar	0,015	0,058	-0,020	0,023
Desvio padrão	1,555	29,907	2,060	29,901
Assimetria	-0,821	0,123	-0,809	0,123
Curtose	11,632	3,039	10,497	3,027

Fonte: Elaborado pelos autores a partir dos Dados da Pesquisa (2022).

Em relação aos retornos médios, a análise sugere que o mercado de ações brasileiro teve um desempenho positivo em termos de preços em reais, enquanto o desempenho em dólares reflete a queda do índice devido às flutuações cambiais. Os retornos médios do volume negociado indicam um aumento nas transações, tanto em reais quanto em dólares, o que pode ser um reflexo do maior interesse dos investidores.

A volatilidade dos retornos do Ibovespa e do volume negociado é medida pelos desvios padrão, que indicam a dispersão dos dados em torno da média. Desvios-padrão elevados sugerem maior variabilidade nos retornos e volumes de negociação, resultante das flutuações no mercado financeiro e nas taxas de câmbio.

Por fim, a assimetria das distribuições dos retornos e volumes negociados, tanto em reais quanto em dólares, revela a presença de caudas mais longas, o que indica distribuições não normais. A curtose, que mede a "altitude" das distribuições, sugere que, para a maioria dos retornos e volumes negociados, as distribuições são mais concentradas em torno da média, o que é típico de mercados financeiros.

Essas análises descritivas fornecem uma compreensão mais detalhada do desempenho do mercado brasileiro, das flutuações nos preços e volumes e das características das distribuições dos dados, ajudando investidores e reguladores a entender melhor as dinâmicas do mercado financeiro.

#### 4.2 Análise Multifractal do Ibovespa

O estudo tem como objetivo avaliar se as séries temporais do Ibovespa exibem tendências persistentes (memória de longo prazo) ou anti-persistentes (mudanças rápidas e respostas exageradas). Para isso, as variações de preço e volume negociado do Ibovespa foram transformadas em passeios aleatórios, o que permitiu a identificação de segmentos nas séries de preços, volume negociado e preço-volume. Com isso, foi possível estimar os expoentes de Hurst generalizados por meio do método MF-DFA.

Na Tabela 2, é apresentado o cálculo do expoente *Hurst*,  $h(q)$ , com  $q$  variando em uma escala de  $-10$  a  $10$ . Essa análise fornece uma compreensão mais aprofundada das características das séries de preço do Ibovespa, volume negociado e preço-volume, auxiliando na identificação de padrões e tendências no mercado financeiro.

**Tabela 2. Expoente de Hurst de preço e volume do Ibovespa**

Ordem ( $q$ )	Valores em R\$			Valores em U\$		
	Ibovespa (preço)	Volume	Preço/ volume	Ibovespa (preço)	Volume	Preço/ volume
-10	0,584	0,579	0,539	0,682	0,609	0,552
-8	0,570	0,567	0,529	0,661	0,592	0,544
-6	0,552	0,552	0,520	0,629	0,570	0,536
-4	0,534	0,536	0,513	0,582	0,548	0,530
2	0,515	0,520	0,513	0,543	0,527	0,529
0	0,495	0,505	0,510	0,521	0,508	0,533
2	0,460	0,486	0,508	0,496	0,490	0,535
4	0,399	0,463	0,490	0,458	0,469	0,521
6	0,340	0,440	0,470	0,419	0,448	0,503
8	0,300	0,421	0,454	0,389	0,431	0,487
10	0,274	0,405	0,442	0,367	0,417	0,473

Nota: Os valores do expoente de *Hurst* apresentados nesta tabela devem ser interpretados considerando as seguintes características: valores entre 0 e 0,5 indicam anti-persistência, evidenciando mudanças rápidas e reações exageradas às novas informações, enquanto valores entre 0,5 e 1 indicam persistência, sugerindo uma memória de longo prazo e a continuidade de tendências no mercado (Hurst, 1951; Podobnik & Stanley, 2008).

Fonte: Elaborado pelos autores a partir dos Dados da Pesquisa (2022).

O expoente *Hurst* é um parâmetro fundamental na análise fractal, revelando propriedades persistentes e anti-persistentes em séries temporais. Conforme mostrado na Tabela 2, os valores médios para o preço do Ibovespa em reais variam de 0,27 a 0,58, para o volume negociado de 0,40 a 0,58 e para preço-volume de 0,44 a 0,53. No caso do Ibovespa em dólares, os valores médios variam de 0,37 a 0,68 para os preços, de 0,42 a 0,61 para o volume negociado e de 0,47 a 0,55 para o preço-volume.

A interpretação desses valores é fundamental para entender a memória das séries temporais analisadas. Valores abaixo de 0,5 indicam características anti-persistentes, que revelam mudanças rápidas nas séries e reações exageradas às informações recentes. Esse comportamento sugere que os investidores tendem a reagir emocionalmente, sem manter continuidade em relação às cotações anteriores. Por exemplo, na Tabela 2, os expoentes de *Hurst* médios para preços, tanto em reais quanto

em dólares, se aproximam frequentemente de 0,4 a 0,5, o que revelam uma predominância de anti-persistência em diversas séries.

Por outro lado, valores acima de 0,5 indicam características persistentes, sugerindo uma memória de longo prazo, com tendência à continuidade das séries temporais. Isso significa que os investidores reagem fortemente a informações passadas, com uma resposta insuficiente às novas informações. Conforme evidenciado na Tabela 2, algumas séries do Ibovespa em dólares apresentam valores médios acima de 0,5, como o valor de 0,61 para o volume negociado, indicando essa característica persistente.

Portanto, os dados apresentados revelam a coexistência de comportamentos persistentes e anti-persistentes nas séries temporais do Ibovespa, tanto em reais quanto em dólares. Essa variabilidade é característica de mercados financeiros complexos, onde diferentes padrões de memória temporal coexistem e moldam a dinâmica do mercado.

Os resultados sugerem que os investidores exibem comportamentos distintos, com implicações diretas para a volatilidade e a dinâmica do mercado. Os expoentes de *Hurst* abaixo de 0,5 indicam reações impulsivas e descontínuas, propensas a gerar flutuações excessivas no curto prazo. Em contraste, valores acima de 0,5 refletem uma memória de longo prazo, com decisões de investimento mais influenciadas pelas tendências passadas, promovendo continuidade no mercado. A interação desses dois padrões de memória temporal sugere que a dinâmica do mercado é multifacetada, afetando diretamente as decisões de investimento e as expectativas em relação aos movimentos futuros.

Os dados apresentados na Tabela 3, que abordam a análise multifractal das séries temporais do Ibovespa em reais e em dólares, são fundamentais para compreender a complexidade e diversidade das flutuações no mercado financeiro brasileiro.

**Tabela 3. Força e complexidade do Ibovespa**

	Força Multifractal	Intensidade e Complexidade
Preço		
Real	0,310	0,471
Dólar	0,175	0,485
Volume		
Real	0,315	0,288
Dólar	0,193	0,321
Preço/volume		
Real	0,097	0,185
Dólar	0,078	0,162

Nota: Conforme Calvet e Fisher (2002), a Força Multifractal mede a complexidade das flutuações nas séries temporais. Valores mais altos indicam maior diversidade e complexidade nas flutuações, enquanto valores mais baixos refletem flutuações mais simples e menos variadas. A Intensidade se refere à magnitude das flutuações, com valores maiores indicando flutuações mais acentuadas. Já a Complexidade está relacionada à organização das flutuações: valores mais elevados indicam séries com flutuações mais irregulares e menos previsíveis (Calvet & Fisher, 2002).

Fonte: Elaborado pelos autores a partir dos Dados da Pesquisa (2022).

A força multifractal, que mede os diferentes níveis de multifractalidade nas séries temporais do Ibovespa, revela valores específicos para o preço e volume nas duas moedas analisadas. Para o preço, os valores observados foram de 0,310 para o real e 0,175 para o dólar, enquanto para o volume, os valores foram de 0,315 e 0,193, respectivamente. No caso da relação preço-volume, os valores foram de 0,097 para o real e 0,078 para o dólar. De maneira geral, valores mais elevados de força multifractal estão associados a uma maior complexidade e diversidade nas flutuações, refletindo uma maior variabilidade nas distribuições de preços e volumes.

Em contrapartida, valores mais baixos indicam uma menor complexidade, com flutuações mais homogêneas e menos variadas. Conforme Calvet e Fisher (2002), valores acima de 0,3 geralmente indicam mercados com maior diversidade e flutuações mais complexas, enquanto valores próximos de 0 sugerem mercados mais simples e previsíveis. Neste contexto, os valores observados para o Ibovespa em reais sugerem uma maior complexidade, especialmente em relação ao preço e volume, quando comparados ao Ibovespa em dólares.

Além disso, a análise de intensidade e complexidade das flutuações fornece informações complementares sobre a distribuição dos dados. Os valores observados para o preço em reais foram de 0,471 para intensidade e 0,185 para complexidade, enquanto em dólares foram de 0,485 e 0,162, respectivamente. Quanto ao volume, os valores foram de 0,288 e 0,321 em reais, e 0,321 e 0,162 em dólares, para intensidade e complexidade, respectivamente.

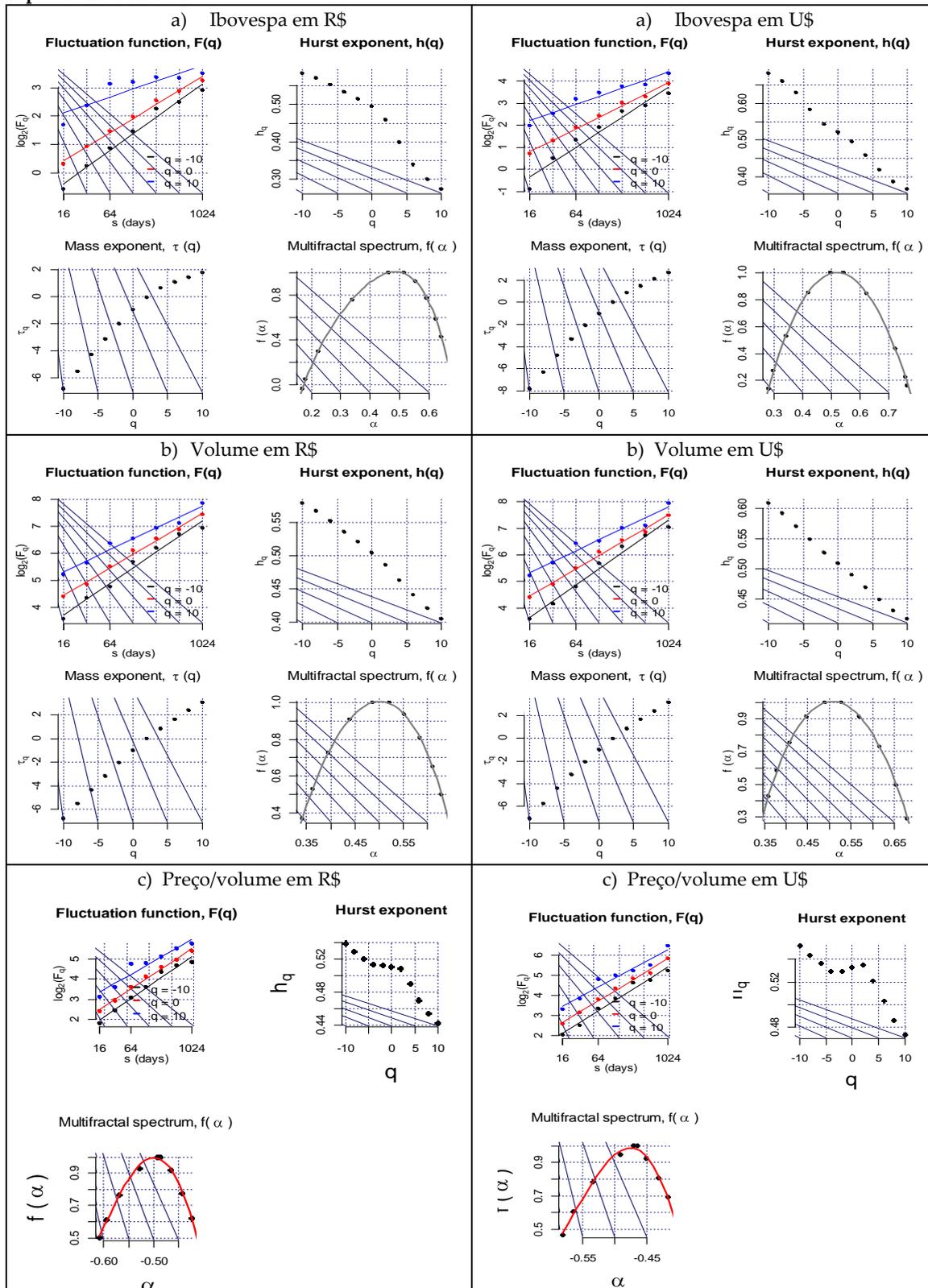
A análise multifractal das séries temporais do Ibovespa, tanto em real quanto em dólar, revela padrões distintos de distribuição das flutuações. Em termos de escala, os padrões observados para o preço e volume em real apresentam uma distribuição de flutuações mais pronunciada e irregular, com maior intensidade e complexidade, o que sugere uma maior diversidade e variabilidade. Por outro lado, os valores em dólar indicam uma distribuição mais homogênea, com flutuações mais estáveis e menores variações, refletindo um mercado relativamente mais simples.

A análise multifractal das séries temporais do Ibovespa, tanto em reais quanto em dólares, revela padrões distintos de distribuição das flutuações. Em termos de escala, os padrões observados para o preço e volume em reais apresentam uma distribuição de flutuações mais pronunciada e irregular, com maior intensidade e complexidade, o que sugere uma maior diversidade e variabilidade. Por outro lado, os valores em dólares indicam uma distribuição mais homogênea, com flutuações mais estáveis e menores variações, refletindo um mercado relativamente mais simples.

Esses resultados corroboram a análise de Patil e Rastogi (2020), que também identificaram uma maior complexidade e multifractalidade nas séries temporais de mercados financeiros, sugerindo que essa crescente complexidade está associada a uma maior volatilidade e diversidade nos preços e volumes. Esses achados são essenciais para uma compreensão mais aprofundada do comportamento do mercado, fornecendo elementos importantes para a formulação de estratégias de investimento mais eficazes.

Após a análise da Tabela 3, que abordou a força multifractal, intensidade e complexidade das séries temporais do Ibovespa, os resultados apresentados na Figura 2 oferecem uma análise detalhada de diferentes aspectos dessas séries. A figura é composta por três painéis: o painel (a) foca nas flutuações nos preços do Ibovespa, o painel (b) examina as flutuações no volume negociado, e o painel (c) investiga a relação entre preço e volume. Cada painel proporciona uma representação abrangente dos aspectos dinâmicos do mercado, utilizando ferramentas analíticas como as Funções de Flutuação, o Expoente de *Hurst*, o Expoente de *Reny* e o Espectro Multifractal, o que possibilita uma análise multifacetada e aprofundada das características das séries temporais e do comportamento do mercado financeiro.

Figura 2. Resultados MF-DFA para as variações diárias do Ibovespa e volume financeiros de negócios. (a) Funções de flutuação para  $q \in [-10, \dots, 10]$ . (b) Expoente de Hurst generalizado para cada valor de  $q$ . (c) Expoente de Reny,  $\tau_q$ . (d) Espectro multifractal.



Fonte: Elaborado pelos autores a partir dos Dados da Pesquisa (2022).

No painel (a), as flutuações nos preços do Ibovespa, tanto em real quanto em dólares, mostram que as séries apresentam valores de  $q$  positivos, indicando a ausência de memória longa. Isso sugere que as flutuações nos preços não mantêm uma dependência de longo prazo, refletindo um

comportamento errático e imprevisível. O Expoente de *Hurst*, por outro lado, revela um comportamento persistente a longo prazo, com uma leve tendência à persistência nos preços; ou seja, após uma flutuação positiva, é mais provável que outra flutuação positiva ocorra. Além disso, o Expoente de *Reny* cresce de forma não linear, indicando que as séries de preços exibem características multifractais, com variações complexas em diferentes escalas. As mudanças observadas no Espectro Multifractal reforçam essa característica multifractal, evidenciando flutuações que não seguem uma distribuição estatística simples.

Esses resultados indicam que o comportamento do Ibovespa é altamente complexo e difícil de prever com base em informações passadas, o que destaca a necessidade de abordagens analíticas avançadas, como modelos multifractais, para uma compreensão mais profunda das dinâmicas do mercado. Tal análise pode, ainda, auxiliar no desenvolvimento de estratégias de investimento mais informadas e adaptativas, levando em consideração a imprevisibilidade e a variabilidade dos preços ao longo do tempo.

O painel (b), que examina as flutuações no volume negociado, revela que o comportamento do volume no mercado financeiro é altamente variável, mas também exibe persistência nas flutuações. As grandes variações observadas indicam que os volumes de negociação podem sofrer flutuações significativas, mas essas variações não são eventos isolados; ao contrário, fazem parte de um processo contínuo de flutuações persistentes. O comportamento persistente, identificado pelo Expoente de *Hurst*, sugere que após uma grande flutuação em uma direção, as flutuações subsequentes tendem a seguir a mesma tendência por um período prolongado.

Além disso, o Espectro Multifractal, com uma estrutura similar à dos preços, sugere que o volume negociado também é caracterizado por complexidade multifractal, com variações em múltiplas escalas de tempo. Isso implica que o volume negociado não segue um padrão simples, mas exibe comportamentos complexos e imprevisíveis ao longo do tempo. Esses resultados indicam que a dinâmica do volume negociado reflete uma estrutura multifacetada e persistente, com implicações significativas para a compreensão da liquidez e das tendências de negociação no mercado. Esse cenário ressalta a importância de modelos analíticos que considerem a complexidade do volume de negociações, ajudando a desenvolver estratégias de previsão e de investimento mais adequadas às flutuações do mercado.

O painel (c), que examina a correlação entre preço e volume negociado, revela uma interação dinâmica e persistente entre essas duas variáveis. As flutuações nas séries de correlação preço-volume indicam que os movimentos passados tanto no preço quanto no volume influenciam os movimentos futuros, refletindo uma memória longa. Isso sugere que os comportamentos de preço e volume não são independentes, mas interdependentes, com os movimentos de um influenciando o outro ao longo do tempo. Tal persistência é característica de mercados financeiros, onde as tendências passadas frequentemente afetam os movimentos futuros. Além disso, o Espectro Multifractal revela que a correlação entre preço e volume não segue um padrão estável, mas exibe variações contínuas em diferentes escalas de tempo. Isso indica que a relação entre essas duas variáveis é multifacetada, com flutuações complexas ao longo de diferentes horizontes temporais.

Esses resultados implicam que a relação entre preço e volume no mercado financeiro é dinâmica e não linear, com variações complexas que podem ser difíceis de prever. Para os investidores, isso significa que é essencial considerar a interação entre preço e volume ao tomar decisões de investimento, pois as flutuações em uma variável podem impactar diretamente a outra, aumentando a imprevisibilidade do mercado. Esse entendimento pode ser útil no desenvolvimento de estratégias de negociação que aproveitem a dinâmica persistente entre preço e volume, adaptando-se às complexas interações do mercado.

Portanto, os resultados obtidos nos painéis (a), (b) e (c) indicam que as séries temporais do Ibovespa, tanto em real quanto em dólar, exibem características multifractais significativas.

Especificamente, as séries de preços mostram uma combinação de tendências anti-persistente e persistente, sugerindo que, enquanto os preços podem eventualmente apresentar reversões, também existem períodos de estabilidade. Por outro lado, tanto o volume negociado quanto a correlação preço-volume exibem comportamentos persistentes, com memória longa, refletindo continuidade nas flutuações. Esses padrões multifractal são consistentes com a teoria multifractal, que postula que os mercados financeiros possuem uma dinâmica complexa e irregular, com flutuações ocorrendo em várias escalas de tempo e intensidade.

Esses achados são fundamentais para a compreensão da dinâmica do mercado financeiro, pois evidenciam que tanto o comportamento dos preços quanto o do volume são influenciados por processos complexos e não lineares, típicos de mercados instáveis e multifractais. A identificação dessas características pode ser essencial para o desenvolvimento de estratégias de investimento, uma vez que mercados multifractais frequentemente exibem comportamentos que não são capturados por modelos tradicionais de análise financeira.

Com base nas análises das séries temporais do Ibovespa em relação ao real e ao dólar, é possível concluir que o mercado financeiro brasileiro apresenta uma dinâmica multifacetada, caracterizada por propriedades multifractais e variações complexas nos padrões de memória de longo prazo dos preços, volume negociado e correlação preço-volume. Essa complexidade sugere que o comportamento do mercado não segue um padrão linear ou previsível, com flutuações que ocorrem em diferentes escalas de tempo e intensidade. Em particular, a persistência observada nas séries de volume e correlação preço-volume pode refletir uma estrutura subjacente que influencia as negociações e a volatilidade, evidenciando um mercado que, embora imprevisível em termos de movimentos imediatos, segue um comportamento contínuo e persistente ao longo do tempo.

Além disso, esses resultados são consistentes com a teoria do mercado multifractal, proposta por Mandelbrot (1999), que postula que os mercados financeiros, especialmente em momentos de crise, podem apresentar padrões de comportamento mais complexos do que os previstos pela teoria tradicional da eficiência de mercado. A presença de memória longa e persistência nas flutuações de preço e volume sugere que os investidores podem explorar essas dinâmicas para obter retornos durante períodos de alta volatilidade. No entanto, essa mesma complexidade também implica que as estratégias de investimento devem ser adaptativas e considerar a natureza imprevisível dos mercados, especialmente em situações de crise, como a pandemia da Covid-19 e o conflito geopolítico entre Rússia e Ucrânia. Ambos os eventos geraram choques econômicos inesperados, com impactos profundos na dinâmica dos mercados financeiros globais e brasileiros, evidenciando a necessidade de uma abordagem mais flexível para se adaptar a essas mudanças abruptas e disruptivas.

Em relação à Hipótese de Eficiência de Mercado (HME), os resultados indicam que o mercado brasileiro, embora mostre características de complexidade e não-linearidade, pode ainda refletir a eficiência em termos de informações disponíveis, como proposto por Fama (1970). No entanto, a existência de estruturas multifractais e a capacidade de prever certos comportamentos de longo prazo desafiam a visão tradicional de mercados perfeitamente eficientes. Conforme Lo (2004), mercados financeiros não são perfeitamente eficientes em todos os momentos, e podem exibir comportamentos de longo prazo que são modelados por processos mais complexos, o que permite a exploração de ineficiências temporárias, particularmente durante períodos de estresse ou crises, como a pandemia e o conflito geopolítico, quando o mercado pode não ajustar os preços de forma imediata ou precisa.

Portanto, esses resultados ressaltam a importância de considerar as complexas interações entre preço e volume e a natureza multifractal do mercado ao formular estratégias de investimento. Além disso, eles apontam para a necessidade de uma abordagem mais dinâmica e adaptativa, especialmente em cenários de crise, onde as flutuações podem ser mais acentuadas e as oportunidades de arbitragem podem surgir, desafiando as premissas da Hipótese de Eficiência de Mercado.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo investigou a dinâmica do mercado de capitais brasileiro, analisando as flutuações do Ibovespa, o volume negociado e a correlação entre preço e volume por meio de uma abordagem multifractal. Os resultados demonstraram que o mercado financeiro brasileiro apresenta características de memória longa, com padrões tanto persistentes quanto anti-persistentes nas séries temporais analisadas. Utilizando dados diários em reais e dólares americanos entre janeiro de 2010 e setembro de 2022, a pesquisa revelou comportamentos complexos e multifacetados, refletindo uma dinâmica influenciada por fatores econômicos e emocionais.

Durante períodos críticos, como as recessões entre 2014 e 2017 e os impactos econômicos da pandemia da Covid-19 a partir de 2020, o Ibovespa registrou alta volatilidade. Os retornos diários no volume negociado apresentaram oscilações intensas, evidenciando a instabilidade do mercado e a reação emocional dos investidores diante de choques econômicos. A análise dos expoentes de *Hurst* indicou tanto comportamentos persistentes, em que os investidores mantêm suas decisões com base em informações passadas, quanto padrões anti-persistentes, marcados por reações exageradas e rápidas às mudanças de mercado.

A presença de memória longa nas séries de volume negociado e na correlação cruzada entre preço e volume destacou a importância desses indicadores como fontes relevantes para a compreensão da dinâmica do mercado. Essas evidências desafiam a Hipótese de Mercado Eficiente em sua forma tradicional, especialmente em contextos de crise, quando os preços não ajustam imediatamente todas as informações disponíveis. A multifractalidade observada nas séries temporais também demonstrou que o mercado exibe uma complexidade elevada, com flutuações que ocorrem em múltiplas escalas de tempo e intensidade. Esse cenário reforça a necessidade de estratégias de investimento mais adaptativas, que considerem a persistência de tendências e a imprevisibilidade das oscilações no curto prazo.

Além de suas contribuições empíricas, o estudo avança a literatura ao aplicar uma abordagem multifractal ao mercado financeiro brasileiro, uma área ainda pouco explorada em comparação a mercados desenvolvidos. A utilização do método MF-DFA permitiu capturar nuances importantes sobre o comportamento do Ibovespa e do volume negociado, trazendo uma perspectiva nova para a análise de mercados emergentes. Os achados se alinham às teorias de Mandelbrot (1999) e Calvet e Fisher (2002), que destacam a presença de multifractalidade em mercados financeiros, mas também apresentam evidências específicas do contexto brasileiro, como a influência de eventos econômicos locais e crises globais nas flutuações de preço e volume.

Apesar das contribuições relevantes, o estudo apresenta algumas limitações que devem ser consideradas. Em primeiro lugar, a análise se concentrou exclusivamente no Ibovespa, limitando a generalização dos resultados para outros índices do mercado brasileiro. Além disso, foram utilizadas séries diárias, o que pode não capturar padrões que surgem em escalas temporais mais curtas ou mais longas. Futuros estudos poderiam adotar dados de alta frequência para uma análise mais detalhada da microestrutura do mercado. Outra limitação refere-se à ausência de uma análise específica sobre o impacto de choques estruturais, como crises políticas e mudanças na política econômica, que certamente influenciam a dinâmica do mercado.

Para futuras pesquisas, sugere-se explorar outros índices da Ibovespa, como o Índice de *Small Caps* (SMLL), para investigar a multifractalidade em segmentos distintos do mercado. A análise de quebras estruturais e a inclusão de dados de alta frequência também poderiam ampliar a compreensão sobre a complexidade das flutuações financeiras. Além disso, seria relevante examinar como investidores institucionais e estratégias de *trading* automático reagem às mudanças no mercado, complementando a análise com uma perspectiva comportamental.

Em síntese, este estudo contribuiu para o entendimento do mercado financeiro brasileiro ao evidenciar sua natureza multifacetada e a presença de propriedades multifractais nos preços e

volumes negociados. Os resultados apontam que, em um ambiente complexo e dinâmico, os investidores enfrentam um cenário de alta volatilidade e flutuações imprevisíveis. Essa complexidade exige estratégias de investimento mais dinâmicas e adaptativas, capazes de lidar com as tendências persistentes e as oscilações abruptas do mercado. Ao fornecer uma análise detalhada sobre a memória de longo prazo e a multifractalidade do Ibovespa, esta pesquisa oferece uma base sólida para futuros estudos e contribui para o avanço do conhecimento sobre a dinâmica dos mercados emergentes.

## REFERÊNCIAS

- Arshad, S. Rizvi, S. A. R., Haroon, O., Mehmood, F. & Gong, Q. (2021). Are oil prices efficient? *Economic Modelling*, 96, Pages 362-370. <https://doi.org/10.1016/j.econmod.2020.03.018>
- Ali, S. R. M., Mensi, W., Anik, K. I., Rahman, M. & Kang, S. H. (2022). The impacts of COVID-19 crisis on spillovers between the oil and stock markets: Evidence from the largest oil importers and exporters. *Economic Analysis and Policy*, v. 73: 345-372. <https://doi.org/10.1016/j.eap.2021.11.009>.
- B3. (2025). Bolsa de Valores do Brasil, 11 Jan. 2025. Disponível em [https://www.b3.com.br/pt\\_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/](https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/servicos-de-dados/market-data/).
- Beaver, W.H. (1968). The information content of annual earnings announcements. *J. Account. Res.* pp. 67-92. <https://doi.org/10.2307/2490070>
- Calvet, L. & Fisher, A. (2002). Multifractality in asset returns: Theory and evidence. *Review of Economics and Statistics*, 84, 381-406. <https://doi.org/10.1162/003465302320259420>
- David, S. A., Inácio, C.M.C., Quintino, D.D. & Machado, J.A.T. (2020). Measuring the Brazilian ethanol and gasoline market efficiency using DFA-Hurst and fractal dimension. *Energy Economics*, v. 85. <https://doi.org/10.1016/j.eneco.2019.104614>
- El Alaoui, M. (2017). Price-volume multifractal analysis of the moroccan stock market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, V. 486, 15, Pages 473-485. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.05.052>
- Fama, E. F. (1970). Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *The Journal of Finance*, v. 25: 383-417.
- Guo, Y., Yu, Z., Yu, C., Cheng, H., Chen, W. & Zhang, H. (2021). Asymmetric multifractal features of the price-volume correlation in China's gold futures market based on MF-ADCCA. *Research in International Business and Finance*, V. 58. <https://doi.org/10.1016/j.ribaf.2021.101495>
- Hasan, R. & Salim, M. M. (2017). Power law cross-correlations between price change and volume change of indian stocks. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 473: 620-31. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2017.01.002>
- Hurst, E. (1951). Long-term storage capacity of reservoirs. *Transactions of the American Society of Civil Engineers*, v.116, pp.770-799.
- IPEA. (2022) *Carta conjuntura*, Número 56, Visão geral da conjuntura, nota de conjuntura 31, terceiro trimestre de 2022. Fonte: [https://www.ipea.gov.br/cartadeconjuntura/wp-content/uploads/2022/09/220930\\_cc\\_56\\_nota\\_31\\_visao\\_geral.pdf](https://www.ipea.gov.br/cartadeconjuntura/wp-content/uploads/2022/09/220930_cc_56_nota_31_visao_geral.pdf)
- Jiang, Z.Q. Xie, W.J., Zhou, W.X. & Sornette, D. (2019). Multifractal analysis of financial markets: a review. *Reports on Progress in Physics*, V. 82. <https://doi.org/10.1088/1361-6633/ab42fb>
- Jiang, Z. Q., Xie, X.J. & Zhou, W. (2014). Testing the weak-form efficiency of the WTI crude oil futures market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 405, Pages 235-244. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2014.02.042>
- Rak, R., Drozdź, S., Forczek, M., Kwapien, J. & Oświęcimka, P. (2015). Detrended cross-correlations between returns, volatility, trading activity, and volume traded for the stock market companies. *Europhys. Lett.*, v. 112. <https://doi.org/10.5506/APhysPolB.44.2035>

- Ruan, Q., Cui, H. & Fan, V. (2020). Spread de esmagamento de soja da China: análise não linear baseada em MF-DCCA. *Physica A.*, V. 554. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.123899>
- Ruan, Q., Wang, Y., Lu, X. & Qin, J. (2016). Cross-correlations between Baltic Dry Index and crude oil prices. *Phys. A Stat. Mech. Its Appl.*, v. 453, pp. 278-289. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.02.018>
- Stošić, D., Stošić, D., Ludermir, T. B. & Stošić, T. (2019). Multifractal behavior of price and volume changes in the cryptocurrency market. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, V. 520, pp. 54-61. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2018.12.038>
- Stošić, D., Stošić, D., Stošić, T. & Stanley, H. E. (2015). Multifractal properties of price change and volume change of stock market indices. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 428, pp. 46-51. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2015.02.046>
- Patil, A. C. & Rastogi, S. (2019). Time-Varying Price–Volume Relationship and Adaptive Market Efficiency: A Survey of the Empirical Literature. *Journal of Risk and Financial Management*, v.12. <https://doi.org/10.3390/jrfm12020105>
- Patil, A. C. & Rastogi, S. (2020). Multifractal Analysis of Market Efficiency across Structural Breaks: Implications for the Adaptive Market Hypothesis. *Journal of Risk and Financial Management*, v.13. <https://doi.org/10.3390/jrfm13100248>
- Peng, C-K., Shlomo, H., Eugene, S. H. & Goldberger, A. L. (1994). Quantification of scaling exponents and crossover phenomena in nonstationary heartbeat time series. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, V. 5. <https://doi.org/10.1063/1.166141>
- Podobnik, B. & Stanley, H. (2008). Detrended Cross-Correlation Analysis: a new method for analyzing two nonstationary time series. *Physical Review Letters*, v. 100. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.084102>
- Kantelhardt, J.W., Zschiegner, S.A., Koscielny-Bunde, E., Havlin, S., Bunde, A. & Stanley, H. (2002). Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 316, pp. 87-114.
- Khediri, K. B. & Charfeddine, L. (2015). Evolving efficiency of spot and futures energy markets: A rolling sample approach. *Journal of Behavioral and Experimental Finance*, 6, p.65-79. <https://doi.org/10.1016/j.jbef.2015.03.006>
- Kristoufek, L. & Vosvrda, M. (2013). Measuring capital market efficiency: Global and local correlations structure. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 392, pp. 184-193. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2012.08.003>
- Khuntia, S. & Pattanayak, J. K. (2018). Adaptive market hypothesis and evolving predictability of bitcoin. *Economics Letters*, v. 167: 26–28. <https://doi.org/10.1016/j.econlet.2018.03.005>
- Kukacka, J. & Kristoufek, L. (2020). Do ‘complex’ financial models really lead to complex dynamics? Agent-based models and multifractality. *Journal of Economic Dynamics and Control*, V. 113. <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2020.103855>
- Lo, A. W. (2004). The Adaptive Markets Hypothesis. *The Journal of Portfolio Management 30th Anniversary*. v. 30, pp.15-29. <https://doi.org/10.3905/jpm.2004.442611>
- Mandelbrot, B. B. (1999). A multifractal walk down wall street. *Scientific American, a division of Nature America, Inc.*, v. 280, n. (2) pp. 70-73. <https://www.jstor.org/stable/26058060>
- Mensi, W., Lee, Y-J., Vo, X.V. & Yoon, S-M. (2021). Does oil price variability affect the long memory and weak form efficiency of stock markets in top oil producers and oil Consumers? Evidence from an asymmetric MF-DFA approach. *The North American Journal of Economics and Finance*, V. 57. <https://doi.org/10.1016/j.najef.2021.101446>
- Mensi, W., Vo, X. V. & Kang, S. H. (2022). Upward/downward multifractality and efficiency in metals futures markets: The impacts of financial and oil crises. *Resources Policy*, 76. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2022.102645>

- Mensi, W. Sensoy, A., Vo, X. V. & Kang, S. H. (2020). Impact of Covid-19 outbreak on asymmetric multifractality of gold and oil prices. *Resources Policy*, 69. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2020.101829>
- Memon, B. A., Yao, H. & Naveed, H. M. (2022). Examining the efficiency and herding behavior of commodity markets using multifractal detrended fluctuation analysis. Empirical evidence from energy, agriculture, and metal markets. *Resources Policy*, 77. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2022.102715>
- Memon, B. A. Aslam, F., Asadova, S. & Ferreira, P. (2023). Are clean energy markets efficient? A multifractal scaling and herding behavior analysis of clean and renewable energy markets before and during the Covid19 pandemic. *Heliyon*, 9. <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2023.e22694>
- Monge, M. (2022). Bunker fuel, commodity prices and shipping market indices following the COVID-19 pandemic. A time-frequency analysis. *International Economics*, V. 172, P. 29-39. <https://doi.org/10.1016/j.inteco.2022.08.003>.
- Moraes, A. K., Furtini, A. A. S., Prado, J. W., Castro Junior, L. G., & Ceretta, P. S. (2024). Evolução da produção científica sobre o Mercado Eficiente: Estudo bibliométrico. *Contextus – Revista Contemporânea De Economia E Gestão*, 22. <https://doi.org/10.19094/contextus.2024.92462>
- Tauchen, G. E. & Pitts, M. (1983). The Price Variability-Volume Relationship on Speculative Markets. *Econometrica*, Vol. 51, No. 2, pp. 485-505. <https://doi.org/10.2307/1912002>
- WORLD BANK. *Global economic Prospects*, (2022). Disponível em: <https://openknowledge.worldbank.org/bitstream/handle/10986/37224/Global-Economic-Prospects-June-2022-Global-Outlook.pdf>.